Estimation-Détection

Mercredi 19 Novembre 2008, 8h00-10h00

On considère n observations x_i (pour i= $1, ..., n$) associées à des variables aléatoires X_i indépendantes et de même loi de Poisson $P(\lambda)$. On rappelle que si X est une variable aléatoire de loi de Poisson de paramètre λ, alors $E[X] = \text{Var}[X] = \lambda$ et $\varphi(t) = E\left[e^{itX}\right] = \exp\left[\lambda\left(e^{it} - 1\right)\right]$.

1ère Partie : Estimation

1) Déterminer l'estimateur du maximum de vraisemblance du paramètre λ noté $\widehat{\lambda}_{\text{MV}}$ (on prendra soin d'établir un tableau de variation associé à la fonction à maximiser). Dire si $\widehat{\lambda}_{\text{MV}}$ est un estimateur sans biais et convergent du paramètre λ
2) Déterminer la borne de Cramer-Rao pour un estimateur non biaisé de λ. L'estimateur $\widehat{\lambda}_{\text{MV}}$ est-il l'estimateur efficace de λ ?
3) On désire estimer le paramètre λ à l'aide d'une méthode d'estimation Bayésienne. On suppose que la loi a priori pour le paramètre λ est une loi gamma de paramètres $\alpha > 2$ et $\beta > 0$ (ce que l'on notera $\lambda \sim \Gamma(\alpha, \beta)$) de densité

$$g(\lambda) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \lambda^{\alpha-1} e^{-\beta\lambda} I_{\mathbb{R}^+}(\lambda),$$

(où $I_{\mathbb{R}^+}(\lambda) = 1$ si $\lambda \in \mathbb{R}^+$ et $I_{\mathbb{R}^+}(\lambda) = 0$ si $\lambda \notin \mathbb{R}^+$) et de moyenne $E[\lambda] = \alpha/\beta$.

3a) Déterminer la borne de Cramer-Rao a posteriori associée à l'estimation du paramètre λ. Vérifier qu'elle est inférieure à la borne trouvée à la question 2).

3b) Déterminer l'estimateur du maximum a posteriori du paramètre λ noté $\widehat{\lambda}_{\text{MAP}}$. Comparer $\widehat{\lambda}_{\text{MV}}$ et $\widehat{\lambda}_{\text{MAP}}$ pour n "grand" et commenter.

3c) Déterminer l'estimateur $\widehat{\lambda}$ qui minimise l'erreur quadratique moyenne $E\left[\left(\lambda - \widehat{\lambda}\right)^2\right]$ (on pourra remarquer que la loi a posteriori de λ est une loi gamma dont on déterminera les paramètres)

2ème Partie : Tests d'Hypothèses

On désire tester les deux hypothèses

$$\begin{cases} H_0 : \lambda = \lambda_0 \\ H_1 : \lambda = \lambda_1 \end{cases}$$

1) Déterminer la statistique du test de Neyman-Pearson et la région critique associée dans les deux cas $\lambda_1 < \lambda_0$ et $\lambda_1 > \lambda_0$. Dans la suite, on supposera $\lambda_1 < \lambda_0$.
2) Déterminer la fonction caractéristique de $T = \sum_{i=1}^n X_i$ et en déduire que T suit une loi de Poisson que l'on précisera sous chaque hypothèse (*Pour ceux qui n'arriveraient pas à traiter cette question,*

on supposera dans la suite que T suit une loi de Poisson de paramètre $n\lambda_0$ sous H_0 et de paramètre $n\lambda_1$ sous H_1).
3) En déduire une relation entre le risque de première espèce α (appelé aussi probabilité de fausse alarme) et le seuil associés au test de Neyman-Pearson. On donnera le résultat en utilisant la fonction de répartition d'une loi de Poisson définie par $F_\mu(x) = P[X < \mu]$ si $X \sim \mathcal{P}(\mu)$.
4) On suppose que n est suffisamment grand pour pouvoir utiliser les résultats du théorème de la limite centrale.

4a) Donner la loi approchée de T issue de ce théorème.

4b) Déterminer les courbes COR (caractéristiques opérationnelles du récepteur) découlant de cette loi approchée. On appelera F la fonction de répartition de la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$ définie par

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}}\, du$$

et on notera $F^{-1}(x)$ son inverse. En supposant que n est suffisamment grand pour faire les approximations nécessaires, déterminer les paramètres qui influent sur la performance asymptotique ($n \to \infty$) du test. De ces deux cas

Premier Cas : $n = 100, \lambda_0 = 1, \lambda_1 = 0.1$

Deuxième Cas : $n = 100, \lambda_0 = 10, \lambda_1 = 1$

indiquer celui qui engendre la meilleure performance.
5) On suppose désormais que les connaissances sur le paramètre λ sous les deux hypothèses H_0 et H_1 sont contenues dans la loi a priori $\lambda \sim \Gamma(\alpha, \beta)$ avec

$$\begin{cases} H_0 : \alpha = \alpha_0, \beta = \beta_0 \\ H_1 : \alpha = \alpha_1, \beta = \beta_1 \end{cases}$$

Déterminer la loi de $x_1, ..., x_n$ notée $f(x_1, ..., x_n)$. Expliciter le test de Bayes lorsque $\beta_0 = \beta_1 = 1$ à l'aide de la fonction gamma définie par

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-u} u^{x-1} du$$

3ème Partie : Test d'ajustement

On désire vérifier si les données x_i sont issues d'un échantillon de variables aléatoires X_i de loi de Poisson (de paramètre inconnu).
1) Rappeler le principe du test du χ^2 pour ce problème. En particulier, on précisera la statistique de ce test, sa loi et la région critique du test.
2) On considère le test suivant

$$\begin{aligned} \text{Rejet de } H_0 \text{ si } U &= \frac{\sum_{i=1}^n \left(X_i - \overline{X}\right)^2}{\overline{X}} > S_\alpha \\ \text{avec } \overline{X} &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i \end{aligned}$$

où α est le risque de première espèce (probabilité de fausse alarme) du test et où U est classiquement appelé l'indice de dispersion. On peut montrer que si $X_1, ..., X_n$ sont des variables aléatoires indépendantes et de même loi de Poisson, alors la loi de U sous l'hypothèse H_0 est une loi du chi-deux à $n-1$ degrés de liberté (i.e. $U \sim \chi^2_{n-1}$). Déterminer le seuil S_α en fonction de α et de la fonction de répartition inverse de la loi du χ^2_{n-1}.