MODAP - DÉTECTION

1. Généralités

- Tests Paramétriques et Non Paramétriques
- Hypothèses Simples et Composées
- Échantillon $(X_1, ..., X_n)$
- Forme d'un Test

$$\text{Rejet de } H_0 \text{ si } T(X_1, ..., X_n) \in \Delta \subset \mathbb{R}^n$$
$$\text{Acceptation de } H_0 \text{ si } T(X_1, ..., X_n) \notin \Delta$$

Statistique du Test : $T(X_1, ..., X_n)$

Zone critique du Test : $\{(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n \mid H_0 \text{ est rejetée}\}$

- Risques de première et seconde espèce

$$\alpha = P[\text{Rejeter } H_0 \mid H_0 \text{ est vraie}]$$
$$\beta = P[\text{Rejeter } H_1 \mid H_1 \text{ est vraie}]$$

Probabilité de fausse alarme (PFA) et Probabilité de non détection (PND)

- **Puissance du test**

$$\pi = 1 - \beta = P[\text{Rejeter } H_0 \mid H_1 \text{ est vraie}]$$

Probabilité de détection

2. Exemple

$(X_1, ..., X_n)$ échantillon de loi normale $\mathcal{N}\left(m, \sigma^2\right)$

$$H_0 \,:\, m = m_0$$
$$H_1 \,:\, m = m_1 > m_0$$

Stratégie de détection

$$\text{Rejet de } H_0 \text{ si } \overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i > S_{PFA}$$

3. Théorème de Neyman-Pearson

$$\text{Rejet de } H_0 \text{ si } \frac{L(X_1, ..., X_n; H_1)}{L(X_1, ..., X_n; H_0)} > S_{PFA}$$

où $L(X_1, ..., X_n; H_j)$ est la vraisemblance de l'échantillon sous l'hypothèse H_j :

$$L(x_1, ..., x_n; H_j) = \left\{ \begin{array}{c} X_i \text{ va discrètes} \\ P\left[X_1 = x_1, ..., X_n = x_n; H_j\right] \\ X_i \text{ va continues} \\ f\left(x_1, ..., x_n; H_j\right) \end{array} \right.$$

Propriété : le test de NP maximise la puissance pour une probabilité de fausse alarme donnée.

Caractéristiques Opérationnelles du Récepteur (**courbes COR**)

$$\pi = g(\alpha) \text{ ou } PD = g(PFA)$$

4. Test du Rapport des Vraisemblances Généralisé (GLR)

Hypothèses Composées

$$H_0 \ : \ \theta \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$$
$$H_1 \ : \ \theta \in \mathbb{R}^n \setminus \Omega$$

Test GLR

$$\text{Rejet de } H_0 \text{ si } \frac{L(X_1, ..., X_n; \widehat{\theta}_1)}{L(X_1, ..., X_n; \widehat{\theta}_0)} > S_{PFA}$$

où $\widehat{\theta}_1$et $\widehat{\theta}_0$ sont les estimateurs du maximum de vraisemblance de θ sous les hypothèses H_1 et H_0.

Exercice 3

On dispose de n observations $x_1, ..., x_n$ issues d'un échantillon $(X_1, ..., X_n)$ de loi normale $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$.

1) Déterminer suivant les valeurs de σ_0^2 et de σ_1^2, la statistique $T(X_1, ..., X_n)$ et la région critique du test de Neyman-Pearson associé au problème suivant :

$$\begin{cases} H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2 \\ H_1 : \sigma^2 = \sigma_1^2 \end{cases}$$

Commenter la forme de la statistique de test. Dans la suite de ce problème, on supposera $\sigma_1 > \sigma_0$.

2) Déterminer la valeur du risque de seconde espèce β lorsque $\alpha = 0.01$, $\sigma_0^2 = 1$, $\sigma_1^2 = 2 > 0$ et $n = 60$.

3) Déterminer les courbes COR (caractéristiques opérationnelles du récepteur) associées au problème précédent. On posera

$$\Phi_n(x) = \int_x^{+\infty} f_n(u)\, du$$

où $f_n(u)$ est la densité d'une loi du χ_n^2 et on notera $\Phi_n^{-1}(x)$ son inverse. Comment la puissance du test de Neyman Pearson dépend-elle de σ_0 et de σ_1 ? Représenter la forme approximative des courbes COR pour différentes valeurs de ces paramètres.

4) Quelle est la loi asymptotique de la statistique $T(X_1, ..., X_n)$ sous les deux hypothèses H_0 et H_1 ? En utilisant cette loi asymptotique, déterminer la valeur du risque de seconde espèce β lorsque $\alpha = 0.01$, $\sigma_0^2 = 1$, $\sigma_1^2 = 2 > 0$ et $n = 100$.