Ergodicité

1. Définition

On dit qu'un processus aléatoire stationnaire $X(t)$ est ergodique au premier ordre si

$$Y_T = \frac{1}{T}\int_0^T X(u)du \underset{T\to\infty}{\overset{mq}{\rightarrow}} E[X(t)]$$

Remarques

- *Convergence en moyenne quadratique*

$$Y_T \underset{T\to\infty}{\overset{mq}{\rightarrow}} E[X(t)] = m \Leftrightarrow \lim_{T\to\infty} E\left[(Y_T - m)^2\right] = 0$$

- *Lien entre stationnarité et ergodicité*

  Ergodicité $\Rightarrow$ Stationnarité

  Stationnarité $\not\Rightarrow$ Ergodicité

- *moyenne statistique = moyenne temporelle*

2. Exemple : le secteur

$$X(t) = \cos(2\pi f_0 t + \theta)$$

avec $f_0 = 50Hz$ et θ uniformément répartie sur $[0, 2\pi]$.

3. Théorème

Pour un processus aléatoire stationnaire au sens large $X(t)$ de moyenne $E[X(t)] = m$, de fonction d'autocorrélation $K(\tau) = E[X(t)X^*(t-\tau)]$ et de densité spectrale de puissance $s(f) = TF[K_X(\tau)]$, on a :

$$\boxed{Y_T = \frac{1}{T}\int_0^T X(t)dt \underset{T\to\infty}{\overset{mq}{\longrightarrow}} m \Leftrightarrow \Delta S(0) = |m|^2}$$

où $\Delta S(0) = S(0^+) - S(0^-)$ et $s(f) = \frac{dS(f)}{df}$.

Preuve

$$E\left[|Y_T - m|^2\right] = E[Y_T Y_T^*] - |m|^2$$

Il suffit donc de montrer que

$$E[Y_T Y_T^*] = \Delta S(0)$$

Par l'isométrie fondamentale $X(t) \leftrightarrow e^{j2\pi ft}$, on a

$$\begin{aligned} E[Y_T Y_T^*] &= \int_{\mathbb{R}} \left| \frac{e^{j2\pi ft} - 1}{j2\pi fT} \right|^2 s(f)df \\ &= \int_{-\infty}^{-\frac{1}{\sqrt{T}}} + \int_{-\frac{1}{\sqrt{T}}}^{\frac{1}{\sqrt{T}}} + \int_{\frac{1}{\sqrt{T}}}^{+\infty} \left| \frac{e^{j2\pi fT} - 1}{j2\pi fT} \right|^2 s(f)df \\ &= I_1 + I_2 + I_3 \end{aligned}$$

$\boxed{\mathrm{I}_3}$

$$\begin{aligned} I_3 &= \int_{\frac{1}{\sqrt{T}}}^{+\infty} \left| \frac{e^{j2\pi fT} - 1}{j2\pi fT} \right|^2 s(f)df \\ &\leq \int_{\frac{1}{\sqrt{T}}}^{+\infty} \frac{4}{4\pi^2 f^2 T^2} s(f)df \\ &\leq \frac{1}{\pi^2 T} \int_{\frac{1}{\sqrt{T}}}^{+\infty} s(f)df \leq \frac{K(0)}{\pi^2 T} \underset{T\to\infty}{\to} 0 \end{aligned}$$

$\boxed{\mathrm{I}_1}$ idem après changement de variables $u = -f$

$\boxed{\mathrm{I}_2}$

$$I_2 = \int_{-\frac{1}{\sqrt{T}}}^{\frac{1}{\sqrt{T}}} \left| \frac{e^{j2\pi fT} - 1}{j2\pi fT} \right|^2 dS(f)$$

On pose

$$\widetilde{S}(f) = \begin{cases} S(f) & f < 0 \\ S(f) - \Delta S(0) & f \geq 0 \end{cases}$$

Par construction, $\widetilde{S}(f) = S(f) - \Delta S(0)\, U(f)$ est continue en $f = 0$. Alors :

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_{-\frac{1}{\sqrt{T}}}^{\frac{1}{\sqrt{T}}} \left| \frac{e^{j2\pi fT} - 1}{j2\pi fT} \right|^2 dS(f) \\ &= \Delta S(0) + \int_{-\frac{1}{\sqrt{T}}}^{\frac{1}{\sqrt{T}}} \left| \frac{e^{j2\pi fT} - 1}{j2\pi fT} \right|^2 d\widetilde{S}(f) \end{aligned}$$

Puisque pour $x > 0$, on a

$$\begin{aligned} \left|\int_0^x e^{iu} du\right| &\leq \int_0^x \left|e^{iu}\right| du = x \\ \left|e^{ix} - 1\right| &\leq x \end{aligned}$$

on en déduit

$$\begin{aligned} I_2 - \Delta S\left(0\right) &= \int_{-\frac{1}{\sqrt{T}}}^{\frac{1}{\sqrt{T}}} \left|\frac{e^{j2\pi fT} - 1}{j2\pi fT}\right|^2 d\widetilde{S}(f) \\ &\leq \int_{-\frac{1}{\sqrt{T}}}^{\frac{1}{\sqrt{T}}} d\widetilde{S}(f) = \widetilde{S}(\tfrac{1}{\sqrt{T}}) - \widetilde{S}(-\tfrac{1}{\sqrt{T}}) \end{aligned}$$

Par continuité de $\widetilde{S}\left(f\right)$, on en déduit $\lim_{T \to +\infty} I_2 = \Delta S\left(0\right)$.

Exemples d'application :

- **le secteur**

$$X(t) = A\cos\left(2\pi f_0 t + \theta\right)$$

où θ est une variable aléatoire uniformément répartie sur $[0, 2\pi]$ et A une variable aléatoire de moyenne m et de variance $\sigma^2 > 0$.

- **le carré du secteur**

$$\begin{aligned} Y(t) &= A^2 \cos^2\left(2\pi f_0 t + \theta\right) \\ &= A^2 \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos\left(4\pi f_0 t + 2\theta\right)\right] \end{aligned}$$

où θ est une variable aléatoire uniformément répartie sur $[0, 2\pi]$ et$A$ une variable aléatoire de moyenne m et de variance $\sigma^2 > 0$.

INP ENSEEIHT

MODAP 1 : Ergodicité

1) On modélise une tension continue de la façon suivante :

$$X(t) = V$$

où V est une variable aléatoire uniformément répartie sur $[0, V_0]$ avec $V_0 = 10$ volts (i.e. chaque réalisation de $X(t)$ est une tension constante $\forall t$).

- Le processus $X(t)$ est-il stationnaire ? Dans l'affirmative, déterminer son spectre de puissance $S_X(f)$ et sa "densité" spectrale de puissance $s_X(f)$.
- Rappeler la définition de la convergence en moyenne quadratique d'un processus aléatoire. Montrer que $\frac{1}{T}\int_0^T X(u)du$ converge en moyenne quadratique vers V lorsque $T \to \infty$. Le signal $X(t)$ est-il ergodique au premier ordre ?
- Vérifier les résultats de 1b) en calculant $\Delta S_X(0) - |m|^2$ où $m = E[X(t)]$.

2) On considère le secteur $X(t) = A\cos(2\pi f_0 t + \phi)$ où A et $f_0 \neq 0$ sont deux constantes et où ϕ est une variable aléatoire uniformément répartie sur $[0, 2\pi]$. On construit le signal $Z(t) = X(t)\exp(-j2\pi f_0 t)$.

- Le processus $Z(t)$ est-il stationnaire ? Dans l'affirmative, déterminer son spectre de puissance $S_Z(f)$ et sa "densité" spectrale de puissance $s_Z(f)$.
- Montrer que $\frac{1}{T}\int_0^T Z(u)du$ converge en moyenne quadratique lorsque $T \to \infty$ vers une variable aléatoire que l'on précisera. Le signal $Z(t)$ est-il ergodique au premier ordre ?
- Vérifier les résultats de 2b) en calculant $\Delta S_Z(0) - |m|^2$ où $m = E[Z(t)]$.