MODAP - TEMPS-FRÉQUENCE / TEMPS-ÉCHELLE

1. Motivations

- La transformée de Fourier est une transformée "**globale**"
- Exemples

$$\begin{aligned} x(t) &= \sin(2\pi f_1 t) + \sin(2\pi f_2 t) \\ y(t) &= \begin{cases} \sin(2\pi f_1 t) & \text{si } t < t_0 \\ \sin(2\pi f_2 t) & \text{si } t > t_0 \end{cases} \end{aligned}$$

Nécessité de développer une représentation **Temps-Fréquence**

2. TF à court terme glissante

$$\begin{aligned} X(f,t) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(u) g^*(u-t) e^{-j2\pi f u} du \\ &= TF\left[x(u) g^*(u-t)\right] \end{aligned}$$

Exemple $g(u) = \Pi_T(u)$

Propriétés

- Linéarité
- Existence d'une formule d'inversion

Exemple

$$y(t) = \begin{cases} e^{2\pi f_1 t} & \text{si } t < t_0 \\ e^{2\pi f_2 t} & \text{si } t > t_0 \end{cases}$$

3. Représentation de Wigner-Ville

$$\begin{aligned} W_x(f,t) &= \int_{-\infty}^{\infty} x\left(t+\frac{u}{2}\right) x^*\left(t-\frac{u}{2}\right) e^{-j2\pi fu} du \\ &= TF\left[x\left(t+\frac{u}{2}\right) x^*\left(t-\frac{u}{2}\right)\right] \end{aligned}$$

Propriétés

- Transformée non-linéaire (termes d'interfèrence)
- Transformée réelle
- Translations

$$\begin{aligned} x(t-t_0) &\Rightarrow W_x(f,t-t_0) \\ x(t)e^{j2\pi f_0 t} &\Rightarrow W_x(f-f_0,t) \end{aligned}$$

Exemples :
Chirp

$$x(t) = \exp\left[j\left(2\pi f_0 t + \pi f_1 t^2\right)\right]$$

Somme de sinusoides

$$x(t) = A_0 \exp\left[j\left(2\pi f_0 t\right)\right] + A_1 \exp\left[j\left(2\pi f_1 t\right)\right]$$

3. Transformée en ondelettes

$$C_x(a,\tau) = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{\infty} x\,(t)\,\varphi^*\left(\frac{t-\tau}{a}\right) dt$$

Propriétés

- Transformée linéaire
- Formule d'inversion
- Expression fréquentielle (Banc de filtres)

$$C_x(a,\tau) = \sqrt{a} \int_{-\infty}^{\infty} X(f)\psi^*\,(af)\, e^{j2\pi f\tau} df$$

Exemples : Détection de discontinuités