Signaux à temps discret

Signal à temps continu : $X(t), \quad t \in \Delta \subset \mathbb{R}$
Signal à temps discret : $X_n, \quad n \in \mathbb{Z}$

1. Suite Stationnaire

La suite de variables aléatoires réelles ou complexes $X_n, n \in \mathbb{Z}$ de puissances finies $E\left[|X_n|^2\right] < \infty$ est dite **stationnaire (au sens large)** si

$$\boxed{\begin{array}{l} E[X_n] = m \quad \text{indépendant de } n \\ E\left[X_n X_{n-k}^*\right] = K_X(k) \quad \text{indépendant de } n \end{array}}$$

La fonction d'autocorrélation d'une suite stationnaire possède des propriétés analogues à la fonction d'autocorrélation d'un processus aléatoire à temps continu stationnaire. Par exemple :

$$\boxed{\begin{array}{ll} \text{Symétrie Hermitienne :} & K_X^*(-k) = K_X(k) \\ \text{Valeur à l'origine :} & |K_X(k)| \leq K_X(0) \end{array}}$$

2. Densité spectrale de puissance

La fonction d'autocorrélation d'une suite stationnaire est liée à une "densité spectrale de puissance (DSP)" par :

$$\boxed{K_X(k) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} e^{i2\pi k\widetilde{f}} s_X\left(\widetilde{f}\right) d\widetilde{f}}$$

où $s_X\left(\widetilde{f}\right)$ est définie au sens des distributions.

Remark 1 *La DSP* $s_X\left(\widetilde{f}\right)$ *se décompose en une partie "spectre de raies" et une partie "spectre continu" comme dans le cas d'un processus aléatoire stationnaire à temps continu*

Remark 2 *Si* $X_n = X(nT_e)$ *provient de l'échantillonnage du signal à temps continu* $X(t)$, $\widetilde{f}$ *correspond à la fréquence normalisée* $\widetilde{f} = \frac{f}{F_e}$.

La DSP d'une suite stationnaire admet le développement en série de Fourier suivant :

$$\boxed{s\left(\widetilde{f}\right) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} K(n)\, e^{-j2\pi n\widetilde{f}}, \qquad -\tfrac{1}{2} \leq \widetilde{f} \leq \tfrac{1}{2}}$$

Preuve

$$\begin{aligned}\sum_{n\in\mathbb{Z}} K(n)\, e^{-j2\pi n\widetilde{f}} &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \left(\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} e^{j2\pi nu} s(u)\, du\right) e^{-j2\pi n\widetilde{f}} \\ &= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} s(u) \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{j2\pi n\left(u-\widetilde{f}\right)}\right) du\end{aligned}$$

Formule de Poisson

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{j2\pi nx} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \delta(x-n)$$

Donc :

$$\begin{aligned}\sum_{n\in\mathbb{Z}} K(n)\, e^{-j2\pi n\widetilde{f}} &= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} s(u) \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} \delta\left(u-\widetilde{f}-n\right)\right) du \\ &= s\left(\widetilde{f}\right)\end{aligned}$$

3. Formules de Wiener-Lee

Soit un filtre linéaire de réponse impulsionnelle h_n d'entrée X_n (stationnaire de moyenne $E[X_n] = m$ et de fonction d'autocorrélation $E\left[X_n X_{n-k}^*\right] = K_X(k)$) et de sortie Y_n :

$$Y_n = \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k X_{n-k} = h_n * X_n$$

La fonction de transfert de ce filtre numérique est définie par

$$\boxed{H\left(\widetilde{f}\right) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} h_n e^{-j2\pi n \widetilde{f}}, \qquad -\frac{1}{2} \leq \widetilde{f} \leq \frac{1}{2}}$$

En d'autres termes, $H\left(\widetilde{f}\right)$ est la transformée de Fourier discrète (TFD) de la suite h_n.

Moyenne

$$\boxed{E[Y_n] = m \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k = mH(0)}$$

Preuve : évidente

Densité Spectrale de Puissance

$$\boxed{s_Y\left(\widetilde{f}\right) = s_X\left(\widetilde{f}\right) H\left(\widetilde{f}\right) H^*\left(\widetilde{f}\right)} \qquad (1)$$

Preuve :

$$\begin{aligned} K_Y(k) &= E\left[\sum_{i \in \mathbb{Z}} h_i X_{n-i} \sum_{j \in \mathbb{Z}} h_j^* X_{n-k-j}^*\right] \\ &= \sum_{i \in \mathbb{Z}} \sum_{j \in \mathbb{Z}} h_i h_j^* E\left[X_{n-i} X_{n-k-j}^*\right] \\ &= \sum_{i \in \mathbb{Z}} \sum_{j \in \mathbb{Z}} h_i h_j^* K_X(k+j-i) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
s_Y\left(\widetilde{f}\right) &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} K_Y(k)\, e^{-j2\pi k\widetilde{f}} \\
&= \sum_{i\in\mathbb{Z}}\sum_{j\in\mathbb{Z}} h_i h_j^* \left\{\sum_{k\in\mathbb{Z}} K_X(k+j-i)\, e^{-j2\pi k\widetilde{f}}\right\} \\
&= \sum_{i\in\mathbb{Z}}\sum_{j\in\mathbb{Z}} h_i h_j^* \left\{\sum_{l\in\mathbb{Z}} K_X(l)\, e^{-j2\pi(l+i-j)\widetilde{f}}\right\} \\
&= \sum_{i\in\mathbb{Z}}\sum_{j\in\mathbb{Z}} h_i h_j^* \left\{s_X\left(\widetilde{f}\right) e^{-j2\pi(i-j)\widetilde{f}}\right\} \\
&= s_X\left(\widetilde{f}\right) H\left(\widetilde{f}\right) H^*\left(\widetilde{f}\right)
\end{aligned}
$$

Intercorrélation Sortie/Entrée

$$
\begin{aligned}
K_{YX}(k) &= E\left[X_n Y_{n-k}^*\right] \\
&= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} H^*\left(\widetilde{f}\right) e^{j2\pi k\widetilde{f}} s_X\left(\widetilde{f}\right) d\widetilde{f}
\end{aligned}
$$

Formule des Interférences

$$
\begin{aligned}
K_{YZ}(k) &= E\left[Y_n Z_{n-k}^*\right] \\
&= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} H\left(\widetilde{f}\right) G^*\left(\widetilde{f}\right) e^{j2\pi k\widetilde{f}} s_X\left(\widetilde{f}\right) d\widetilde{f}
\end{aligned}
$$

Preuves : Isométrie

Utilisation de la Transformée en Z

On trouve dans la littérature des formules de Wiener Lee exprimées à l'aide de la transformée en Z (TZ). La TZ de la suite X_n est définie par :

$$X(z) = TZ\left[X_n\right] = \sum_{k \in \mathbb{Z}} X_k z^{-k}$$

La TZ de cette suite coincide donc avec sa TFD lorsque $Z = e^{j2\pi\widetilde{f}}$, c'est-à-dire lorsqu'on se place sur le cercle unité. Lorsque $Y_n = h_n * X_n$, on a classiquement $Y(z) = H(z)X(z)$. Par ailleurs, la TZ de la fonction d'autocorrélation de la suite Y_n (appelée densité spectrale de puissance) vérifie :

$$\boxed{s_Y(z) = TZ\left[K_Y(k)\right] = s_X(z)H(z)H^*\left(\frac{1}{z^*}\right)}$$

Preuve

$$\begin{aligned}
K_Y(k) &= E\left[Y_n Y_{n-k}^*\right] \\
&= E\left[\sum_{i \in \mathbb{Z}} h_i X_{n-i} \sum_{j \in \mathbb{Z}} h_j^* X_{n-k-j}^*\right] \\
&= \sum_{i \in \mathbb{Z}} \sum_{j \in \mathbb{Z}} h_i h_j^* K_X\left(k + j - i\right)
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
s_Y(z) &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left\{ \sum_{i \in \mathbb{Z}} \sum_{j \in \mathbb{Z}} h_i h_j^* K_X\left(k + j - i\right) \right\} z^{-k} \\
&= \sum_{l \in \mathbb{Z}} \left\{ \sum_{i \in \mathbb{Z}} \sum_{j \in \mathbb{Z}} h_i h_j^* K_X\left(l\right) \right\} z^{-l+j-i}
\end{aligned}$$

$$= s_X(z) \sum_{i\in\mathbb{Z}} \sum_{j\in\mathbb{Z}} h_i h_j^* z^{j-i}$$

$$= s_X(z) H(z) H^* \left(\frac{1}{z^*}\right)$$

Remark 3 *Pour* $z = e^{j2\pi\widetilde{f}}$*, on trouve*

$$s_Y\left(e^{j2\pi\widetilde{f}}\right) = s_X\left(e^{j2\pi\widetilde{f}}\right) H\left(e^{j2\pi\widetilde{f}}\right) H^*\left(e^{j2\pi\widetilde{f}}\right)$$

qui correspond à la relation (1).

D'autres Définitions de la DSP

On peut définir d'autres densités spectrales de puissance dont les plus courantes sont :

$$\boxed{s(f) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} K(n)\, e^{-j2\pi n T_e f}, \qquad -\frac{F_e}{2} \leq f \leq \frac{F_e}{2}}$$

ou

$$\boxed{s(\omega) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} K(n)\, e^{-jn\omega}, \qquad -\pi \leq \omega \leq \pi}$$

Ces définitions de la DSP diffèrent par la variable considérée (fréquence, fréquence normalisée, pulsation, ...).

MODAP 2 : Echantillonnage d'une sinusoide

On considère un processus aléatoire défini par

$$X(t) = A \sin(2\pi f_0 t + \theta)$$

où A et f_0 sont deux constantes et θ est une phase aléatoire uniformément répartie sur l'intervalle $[0, 2\pi[$.

1) Justifier brièvement le fait que la phase θ soit modélisée par une variable aléatoire. Rappeler rapidement la fonction d'autocorrélation $K_X(\tau)$ et la Densité Spectrale de Puissance (DSP) $s_X(f)$ du processus $X(t)$.

2) Le processus aléatoire $X(t)$ est échantillonné à la fréquence $F_e = \frac{1}{T_e}$, ce qui génère la suite de variables aléatoires $Z_n = X(nT_e), n \in \mathbb{Z}$. La fonction d'autocorrélation de cette suite est classiquement définie par

$$K_Z(k) = E[Z_n Z_{n+k}] = K_X(kT_e)$$

et on peut définir la DSP de la suite Z_n par :

$$s_Z(f) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} K_Z(k) e^{-j2\pi k T_e f} \tag{1}$$

2.1) Vérifier que si la DSP de Z_n vérifie (1), on a :

$$\frac{1}{F_e} \int_{-F_e/2}^{F_e/2} s_Z(f) e^{j2\pi i T_e f} df = K_Z(i) = K_X(iT_e) \tag{2}$$

2.2) Rappeler l'expression intégrale permettant d'obtenir $K_X(\tau)$ en fonction de $s_X(f)$. En découpant cette intégrale en une somme d'intégrales sur les intervalles $\left[-\frac{F_e}{2} + kF_e, \frac{F_e}{2} + kF_e\right]$, montrer que $K_X(\tau)$ s'écrit :

$$K_X(\tau) = \int_{-F_e/2}^{F_e/2} g(f, \tau) e^{j2\pi f \tau} df \tag{3}$$

où $g(f, \tau)$ est une fonction que l'on précisera. Que devient l'équation (3) pour $\tau = iT_e, i \in \mathbb{Z}$ (on vérifiera en particulier que $g(f, iT_e)$ est périodique par rapport à f) ? En identifiant l'expression obtenue avec (2) et en supposant qu'il existe une seule DSP $s_Z(f)$ vérifiant (2), déterminer $s_Z(f)$. Vérifier que $s_Z(f)$ peut être obtenue par périodisation de $s_X(f)$.

2.3) On suppose $f_0 = 100Hz$ et $F_e = 1000Hz$. Quel signal récupère-t-on lorsqu'on filtre $Z(t)$ par un filtre de transmittance

$$H(f) = \Pi_{F_e}(f) = \begin{cases} 1 \text{ si } |f| \leq F_e/2 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

Répondre à la même question lorsque $f_0 = 100Hz$ et $F_e = 160Hz$.

3) Pour modéliser le fait que $X(t)$ soit observé sur un intervalle de durée finie, on considère le processus aléatoire

$$Y(t) = X(t)I(t)$$

où $I(t)$ est un processus aléatoire stationnaire appelé "fenêtre" à support borné $[-T/2, T/2]$ (c'est-à-dire tel que $I(t) = 0$ si $t \notin [-T/2, T/2]$). On suppose que $I(t)$ et $X(t)$ sont des processus aléatoires indépendants et on note $K_I(\tau)$ et $s_I(f)$ la fonction d'autocorrélation et la densité spectrale de puissance de $I(t)$. Déterminer la densité spectrale de puissance de $Y(t)$ notée $s_Y(f)$ en fonction de $s_I(f)$. Représenter graphiquement $s_Y(f)$ lorsque $K_I(\tau) = \Pi_T(\tau)$ et lorsque $K_I(\tau) = \Lambda_{T/2}(\tau)$. En déduire la fenêtre à utiliser lorsqu'on cherche à distinguer deux raies spectrales proches noyées dans un bruit additif blanc de densité spectrale de puissance $s_B(f) = N_0$.