
EXAMEN PROBABILITÉS - 1SN

15 Novembre 2018 (14h-15h45)

Partiel sans document (Une feuille A4 recto-verso autorisée)

Exercice 1: Égalisation d'histogramme (7 points)

1. On considère une variable aléatoire continue X définie sur l'intervalle $]0, T[$ ($T > 0$) de densité

$$p(x, \cdot) = \begin{cases} Ke^{-ax} & \text{si } x \in]0, T[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (1)$$

où $K > 0$ est une constante.

- Déterminer la valeur de K pour que p soit une densité de probabilité.
- Déterminer la loi de la variable aléatoire

$$Y = \frac{KT}{a} [1 - \exp(-aX)]. \quad (2)$$

2. De manière plus générale, on considère une variable aléatoire continue X définie sur l'intervalle $]0, T[$ ($T > 0$) de densité $p(x)$ et de fonction de répartition strictement croissante. On considère la variable aléatoire Y définie par

$$Y = T \int_0^X p(u) du.$$

- Déterminer la fonction de répartition de la variable aléatoire Y et en déduire que Y suit la loi uniforme sur l'intervalle $]0, T[$.
- Montrer que dans le cas où X possède la loi définie par (1), la variable aléatoire Y est définie comme dans (2).

Exercice 2: Changement de variables (9 points)

On considère deux variables aléatoires indépendantes X et Y de lois exponentielles de paramètre 1 (notées $X \sim \mathcal{E}(1)$ et $Y \sim \mathcal{E}(1)$) définies par

$$p(x, \cdot) = \begin{cases} e^{-x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad \text{et} \quad p(\cdot, y) = \begin{cases} e^{-y} & \text{si } y > 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Déterminer la loi du couple (Z, T) lorsque $Z = X + Y$ et $T = X - Y$. En déduire les lois marginales de Z et T , leurs moyennes $E[Z]$ et $E[T]$ et leurs variances $\text{Var}(X)$ et $\text{Var}(Y)$.
2. Déterminer la covariance du couple (Z, T) .
3. Déterminer la fonction caractéristique de Z . En utilisant les tables, retrouver la loi de Z déterminée à la première question.

Exercice 3: Médiane (5 points)

On considère une variable aléatoire réelle X de fonction de répartition notée F continue et strictement croissante et on appelle médiane de X le nombre m tel que $F(m) = 1/2$.

1. Déterminer la fonction de répartition d'une loi exponentielle de paramètre a notée $\mathcal{E}(a)$ de densité

$$p(x) = \begin{cases} ae^{-ax} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

En déduire la médiane de la loi exponentielle $\mathcal{E}(a)$.

2. On considère une suite de variables aléatoires indépendantes X_1, \dots, X_n de même loi exponentielle $\mathcal{E}(a)$ et on définit la suite de variables aléatoires Y_1, \dots, Y_n de la manière suivante

$$\begin{aligned} Y_i &= 1 \text{ si } X_i > m \\ Y_i &= 0 \text{ sinon} \end{aligned}$$

où m est la médiane de la loi exponentielle $\mathcal{E}(a)$.

- Déterminer la loi de Y_i , sa moyenne et sa variance
- En déduire la loi de $S_n = \sum_{i=1}^n Y_i$.
- En utilisant le théorème de la limite centrale, montrer que la loi de S_n peut s'approcher pour n grand par une loi normale dont on précisera les paramètres.

Exercice 1

$$1) \int_0^T k e^{-ax} dx = 1 = \frac{k}{-a} \left(e^{-ax} \right)_0^T \Rightarrow \boxed{k = \frac{a}{1 - e^{-aT}}} \quad (1 \text{ pt})$$

$$2) y = \frac{kT}{a} (1 - e^{-ax}) \Leftrightarrow x = -\frac{1}{a} \ln \left(1 - \frac{ay}{kT} \right)$$

donc le changement de variables est bijectif

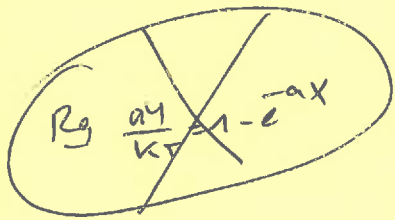
$$x=0 \Rightarrow y=1$$

$$x=T \Rightarrow y = \frac{kT}{a} (1 - e^{-aT}) = T$$

donc le changement de variables est bijectif de]0, T[dans]0, T[(1 pt)

Jacobin $\left| \frac{dx}{dy} \right| = \left| -\frac{1}{a} \left(\frac{1}{1 - \frac{ay}{kT}} \right) \left(-\frac{a}{kT} \right) \right| = \frac{1}{|kT - ay|}$ (1 pt)

Densité de Y $\pi(y) = k \exp \left[-a \left(-\frac{1}{a} \right) \ln \left(1 - \frac{ay}{kT} \right) \right] \left| \frac{1}{kT - ay} \right|$
 $= \frac{a}{(1 - e^{-aT})} \left(1 - \frac{ay}{kT} \right) \frac{1}{|kT - ay|}$



$$= \frac{a}{(1 - e^{-aT})} \frac{kT - ay}{kT} \frac{1}{|kT - ay|}$$

$$= \frac{1}{T} \frac{kT - ay}{|kT - ay|} \quad y \in]0, T[$$

$y \in]0, T[\Rightarrow kT - ay > 0$ donc $\boxed{\pi(y) = \frac{1}{T} \mathbb{1}_{]0, T[}(y)}$

Y suit donc la loi uniforme sur l'intervalle]0, T[(1 pt)

$$2) \int_0^t p(u) du < \frac{t}{T} \Rightarrow P[Y < t] = P \left[\int_0^x p(u) du < \frac{t}{T} \right] = P \left[\int_0^x p(u) du < \frac{t}{T} \right]$$

donc $P(Y < t) = P \left(F(x) < \frac{t}{T} \right) = P \left(x < F^{-1} \left(\frac{t}{T} \right) \right)$ (1 pt)

$F \nearrow$ donc inversible

d'où $P(Y < t) = F \left[F^{-1} \left(\frac{t}{T} \right) \right] = \frac{t}{T}$

Puisque $x \in]0, T[$, $y \in]0, T[$ donc $P(Y < t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t > T \end{cases}$ (1 pt)

(2)

On en conclut que la densité de Y est

$$p(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \notin]0, T[\\ \frac{1}{T} & \text{si } t \in]0, T[\end{cases}$$

donc Y suit la loi uniforme sur $]0, T[$

$$\int_0^x p(u) du = \int_0^x k e^{-ax} dx = \frac{k}{-a} [e^{-ax} - 1] = \frac{1 - e^{-ax}}{a} \times \frac{a}{1 - e^{-aT}} \times k$$

$$\text{donc } \int_0^x p(u) du = \frac{1 - e^{-ax}}{1 - e^{-aT}} = \frac{k}{a} (1 - e^{-ax})$$

$$\text{d'où } Y = T \int_0^x p(u) du = \boxed{\frac{TK}{a} (1 - e^{-ax})}$$

(1pt)

on retrouve bien (2)

Exercice 2

$$1) \begin{cases} Z = x+y \\ T = x-y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2}(z+T) \\ y = \frac{1}{2}(z-T) \end{cases}$$

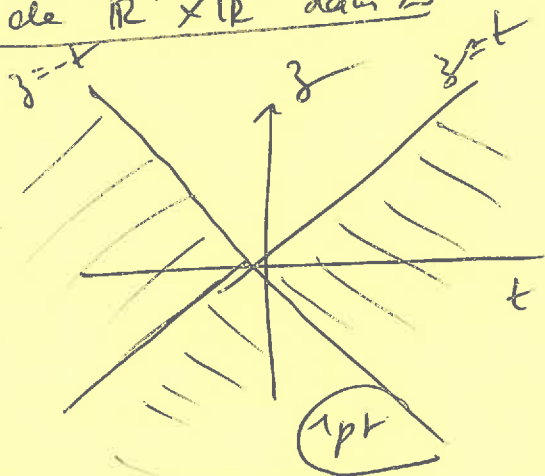
(1pt)

Le changement de variables est donc bijectif de $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ dans Δ

Domaine Δ = il est défini par

$$\begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z+t > 0 \\ z-t > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z > t \\ z > -t \end{cases}$$

domaine qui correspond au cône non hachuré



(1pt)

Jacobien

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial z} & \frac{\partial y}{\partial z} \\ \frac{\partial x}{\partial T} & \frac{\partial y}{\partial T} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{2} \quad \text{donc } |J| = \frac{1}{2} \quad (1pt)$$

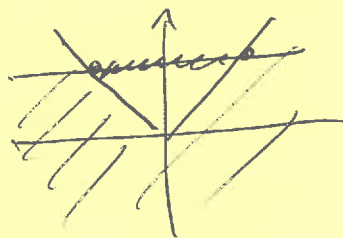
Densité

$$g(z, t) = \frac{1}{2} e^{-\frac{1}{2}(z+t) - \frac{1}{2}(z-t)} \quad (z, t) \in \Delta$$

$$g(z, t) = \frac{1}{2} e^{-z} \quad (z, t) \in \Delta \quad (1 \text{ pt})$$

(3)

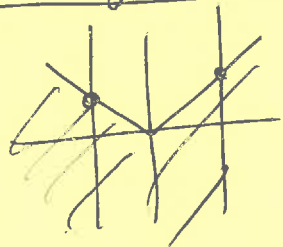
loi marginale de Z



$$g(z, 0) = \begin{cases} 0 & \text{si } z < 0 \\ \int_{-z}^{+\infty} \left(\frac{1}{2} e^{-t}\right) dt = z e^{-z} & z > 0 \end{cases} \quad (1 \text{ pt})$$

on reconnaît une loi gamma $\Gamma(1, 2)$ de moyenne $E[Z] = 2$ et de variance $\text{Var}[Z] = 2$

loi marginale de T



$$g(0, t) = \begin{cases} \int_{-t}^{+\infty} \frac{1}{2} e^{-z} dz & t < 0 \\ \int_{t}^{+\infty} \frac{1}{2} e^{-z} dz & t > 0 \end{cases}$$

$$\text{Soit } g(0, t) = \begin{cases} t < 0 & \frac{1}{2} [-e^{-z}]_{-t}^{+\infty} = \frac{1}{2} e^t & t < 0 \\ t > 0 & \frac{1}{2} [-e^{-z}]_t^{+\infty} = \frac{1}{2} e^{-t} & t > 0 \end{cases} \quad (1 \text{ pt})$$

c'est la première loi de Laplace de moyenne $E[T] = 0$ et de variance $\text{Var}[T] = 2$

1 pt pour les moyennes et variances

$$3) \phi_Z(t) = E[e^{itZ}] = E[e^{it(X+Y)}] = \phi_X(t) \phi_Y(t)$$

$$\text{En utilisant les faits, on obtient } \phi_Z(t) = \frac{1}{(1-it)^2}$$

qui est la fonction caractéristique d'une loi $\Gamma(1, 2)$.

On retrouve le résultat de la question précédente

(1 pt)

$$2) \text{Cov}(Z, T) = E[ZT] - \frac{E[Z]^2}{2} \frac{E[T]}{0} = E[ZT]$$

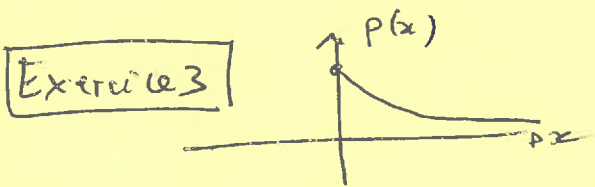
donc $\text{cov}(Z, T) = E[(X+Y)(X-Y)] = E[X^2 - Y^2]$

$$= (\text{Var} X + E[X^2] - \text{Var} Y - E[Y^2])$$

$$= E[X^2] - E[Y^2]$$

Comme X et Y ont la même loi $E[X^2] = E[Y^2]$ donc

$$\boxed{\text{cov}(Z, T) = 0} \quad (1 \text{ pr})$$



$$1) F(x) = P[X < x] = \int_{-\infty}^x p(u) du = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ [-e^{-ax}]_0^x = 1 - e^{-ax} & x > 0 \end{cases} \quad (1 \text{ pr})$$

$$F(m) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 1 - e^{-am} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow e^{-am} = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow -am = -\ln 2$$

$$\text{d'où } \boxed{m = \frac{\ln 2}{a}} \quad (1 \text{ pr})$$

2) $Y_i \begin{cases} \rightarrow 1 \\ \rightarrow 0 \end{cases}$

$$P(Y_i = 1) = P(Y_i > m) = 1 - F(m) = \frac{1}{2}$$

$$P(Y_i = 0) = P(Y_i < m) = F(m) = \frac{1}{2}$$

donc Y_i suit une loi uniforme sur $\{0, 1\}$ (1 pr)
 ou une loi de Bernoulli de paramètre $p = \frac{1}{2}$

3) $S_n \sim B(n, \frac{1}{2})$ de moyenne $E(S_n) = \frac{n}{2}$ et de variance $\text{Var} S_n = \frac{n}{4}$ (1 pr)

4) D'après le théorème de la limite centrale, on peut approximer la loi de S_n par une loi normale $N(\frac{n}{2}, \frac{n}{4})$ (1 pr)

LOIS DE PROBABILITÉ CONTINUES

m : moyenne σ^2 : variance F. C. : fonction caractéristique

LOI	Densité de probabilité	m	σ^2	F. C.
Uniforme	$f(x) = \frac{1}{b-a}$ $x \in]a, b[$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$	$\frac{e^{itb} - e^{ita}}{it(b-a)}$
Gamma $\Gamma(\theta, \nu)$	$f(x) = \frac{\theta^\nu}{\Gamma(\nu)} e^{-\theta x} x^{\nu-1}$ $\theta > 0, \nu > 0$ $x \geq 0$	$\frac{\nu}{\theta}$	$\frac{\nu}{\theta^2}$	$\frac{1}{(1 - i\frac{t}{\theta})^\nu}$
Inverse gamma $IG(\theta, \nu)$	$f(x) = \frac{\theta^\nu}{\Gamma(\nu)} e^{-\frac{\theta}{x}} \frac{1}{x^{\nu+1}}$ $\theta > 0, \nu > 0$ $x \geq 0$	$\frac{\theta}{\nu-1}$ si $\nu > 1$	$\frac{\theta^2}{(\nu-1)^2(\nu-2)}$ si $\nu > 2$	(*)
Première loi de Laplace	$f(x) = \frac{1}{2} e^{- x }$	0	2	$\frac{1}{1+t^2}$
Normale $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$	$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$	m	σ^2	$e^{imt - \frac{\sigma^2 t^2}{2}}$
Khi ₂ χ_ν^2 $\Gamma(\frac{1}{2}, \frac{\nu}{2})$	$f(x) = k e^{-\frac{x}{2}} x^{\frac{\nu}{2}-1}$ $k = \frac{1}{2^{\frac{\nu}{2}} \Gamma(\frac{\nu}{2})}$ $\nu \in \mathbb{N}^*, x \geq 0$	ν	2ν	$\frac{1}{(1-2it)^{\frac{\nu}{2}}}$
Cauchy $c_{\lambda, \alpha}$	$f(x) = \frac{1}{\pi\lambda \left(1 + \left(\frac{x-\alpha}{\lambda}\right)^2\right)}$ $\lambda > 0, \alpha \in \mathbb{R}$	(-)	(-)	$e^{i\alpha t - \lambda t }$
Beta $B(a, b)$	$f(x) = k x^{a-1} (1-x)^{b-1}$ $k = \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}$ $a > 0, b > 0, x \in]0, 1[$	$\frac{a}{a+b}$	$\frac{ab}{(a+b)^2(a+b+1)}$	(*)

LOIS DE PROBABILITÉ DISCRÈTES

m : moyenne σ^2 : variance **F. C.** : fonction caractéristique

$p_k = P[X = k]$ $p_{1,\dots,m} = P[X_1 = k_1, \dots, X_m = k_m]$

LOI	Probabilités	m	σ^2	F. C.
Uniforme	$p_k = \frac{1}{n}$ $k \in \{1, \dots, n\}$	$\frac{n+1}{2}$	$\frac{n^2-1}{12}$	$\frac{e^{it}(1 - e^{itn})}{n(1 - e^{it})}$
Bernoulli	$p_1 = P[X = 1] = p$ $p_0 = P[X = 0] = q$ $p \in [0, 1]$ $q = 1 - p$	p	pq	$pe^{it} + q$
Binomiale $B(n, p)$	$p_k = C_n^k p^k q^{n-k}$ $p \in [0, 1]$ $q = 1 - p$ $k \in \{0, 1, \dots, n\}$	np	npq	$(pe^{it} + q)^n$
Binomiale négative	$p_k = C_{n+k-1}^{n-1} p^n q^k$ $p \in [0, 1]$ $q = 1 - p$ $k \in \mathbb{N}$	$n \frac{q}{p}$	$n \frac{q}{p^2}$	$\left(\frac{p}{1 - qe^{it}}\right)^n$
Multinomiale	$p_{1,\dots,m} = \frac{n!}{k_1! \dots k_m!} p_1^{k_1} \dots p_m^{k_m}$ $p_j \in [0, 1]$ $q_j = 1 - p_j$ $k_j \in \{0, 1, \dots, n\}$ $\sum_{j=1}^m k_j = n$ $\sum_{j=1}^m p_j = 1$	np_j	Variance : $np_j q_j$ Covariance : $-np_j p_k$	$\left(\sum_{j=1}^m p_j e^{it}\right)^n$
Poisson $P(\lambda)$	$p_k = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$ $\lambda > 0$ $k \in \mathbb{N}$	λ	λ	$\exp[\lambda(e^{it} - 1)]$
Géométrique	$p_k = pq^{k-1}$ $p \in [0, 1]$ $q = 1 - p$ $k \in \mathbb{N}^*$	$\frac{1}{p}$	$\frac{q}{p^2}$	$\frac{pe^{it}}{1 - qe^{it}}$