Ex1

1) Il est clair que T est à valeurs dans $\{0,1\}$. De plus

$$P[T=0] = P[Z=1 \text{ et } X=0] + P[Z=0 \text{ et } Y=0]$$
$$= \alpha(1-p) + (1-\alpha)(1-p) = \boxed{1-p}$$

indépendance de Z et X et de Z et Y

(1pt)

$$P(T=1) = 1 - P[T=0] = \boxed{p}$$

On voit donc que T suit une loi de Bernoulli de paramètre p.

2) Le couple (T,X) prend ses valeurs dans l'ensemble $\{(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)\}$. Pour déterminer sa loi, il suffit donc de déterminer les quatres probabilités $p_{00} = P[T=0, X=0]$, $p_{01} = P(T=0, X=1)$, $p_{10} = P(T=1, X=0)$ et $p_{11} = P(T=1, X=1)$. Les calculs sont élémentaires

$$p_{00} = P[T=0, X=0] = P[\text{"}X=0, Z=1 \text{ et } X=0\text{" ou "}X=0, Z=0, Y=0\text{"}]$$
$$= \boxed{\alpha(1-p) + (1-\alpha)(1-p)^2}$$

$$p_{01} = P(T=0, X=1] = P[X=1, Z=1, X=0) + \underbrace{P(X=1, Z=0, Y=0]}_{(1-\alpha)\,p(1-p)}$$

impossible

(2pts)

$$= \boxed{(1-\alpha)\,p(1-p)}$$

$$p_{10} = P(T=1, X=0) = \boxed{(1-\alpha)\,p(1-p)}$$

$$p_{11} = P(T=1, X=1) = P(X=1, Z=1, X=1) + P(X=1, Z=0, Y=1]$$
$$= \boxed{\alpha p + (1-\alpha)\,p^2}$$

On remarquera que

$$p_{00} + p_{01} + p_{10} + p_{11} = \cancel{\alpha 2\alpha p}\ \alpha(1-p) + (1-p)^2 - \alpha(1-p)^2 + 2p(1-p)(1-\alpha)$$
$$+ \alpha p + (1-\alpha)\,p^2$$
$$= \alpha\underbrace{(\cancel{1} \cancel{-p} \cancel{-1} - \cancel{p^2} + \cancel{2p} + \cancel{p} - \cancel{p^2} - \cancel{2p} + \cancel{2p^2})}_{0} = 1$$
$$+ 1 - \cancel{2p} + \cancel{p^2} + \cancel{2p} - \cancel{2p^2} + \cancel{p^2}$$

3) $\text{cov}(T,X) = E(TX) - E(T)E(X)$

$$= P[T=1, X=1] - P(T=1)\,P[X=1]$$

$$= \alpha p + (1-\alpha)p^2 - p^2 = \alpha p - \alpha p^2 = \boxed{\alpha p(1-p)}$$

(1pt)

coefficient de corrélation

$$r(T,X) = \frac{\text{cov}(T,X)}{\sigma_T \sigma_X}$$

Mais $\sigma^2_X = E(X^2) - E^2(X) \underset{\nearrow}{=} E(X) - E^2(X) = E(X)[1-E(X)] = \boxed{p(1-p)}$

$X \in \{0,1\}$

et

$\sigma^2_T = \boxed{p(1-p)}$

Donc $r(T,X) = \dfrac{\alpha p(1-p)}{p(1-p)}$ soit $\boxed{r(T,X) = \alpha}$

(1pt)

4) Si les variables T et X étaient indépendantes, on aurait

$$\text{cov}(T,X) = 0,$$

ce qui n'est pas le cas d'après la question précédente. L'intérêt pratique de cet exercice est de savoir générer des variables de Bernoulli corrélées ayant un coefficient de corrélation donné

(1pt)

Ex2

1) Puisque les variables X et Y sont indépendantes, la loi du couple (X,Y) est de densité $p(x,y) = p(x,\cdot)\,p(\cdot,y)$ $(x,y) \in \mathbb{R}^2$

d'où

$$\boxed{p(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{4} & \text{si } (x,y) \in]-1,1[\times]-1,+1[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}}$$

(1pt)

2) Le changement de variables est bijectif puisque

$$\begin{cases} Z = X+Y \\ T = X-Y \end{cases} \iff \begin{cases} X = \frac{1}{2}(Z+T) \\ Y = \frac{1}{2}(Z-T) \end{cases}$$

Le Jacobien de la transformation est $J = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}$

donc $\boxed{|J| = \frac{1}{2}}$

Le théorème du changement de variables nous permet de conclure que la densité du couple (Z,T) est

$$\pi(z,t) = \underbrace{p\left(\tfrac{1}{2}(z+t), \tfrac{1}{2}(z-t)\right)} \times \frac{1}{2}$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{4} & \text{si } \frac{1}{2}(z+t) \in]-1,+1[\text{ et } \frac{1}{2}(z-t) \in]-1,+1[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

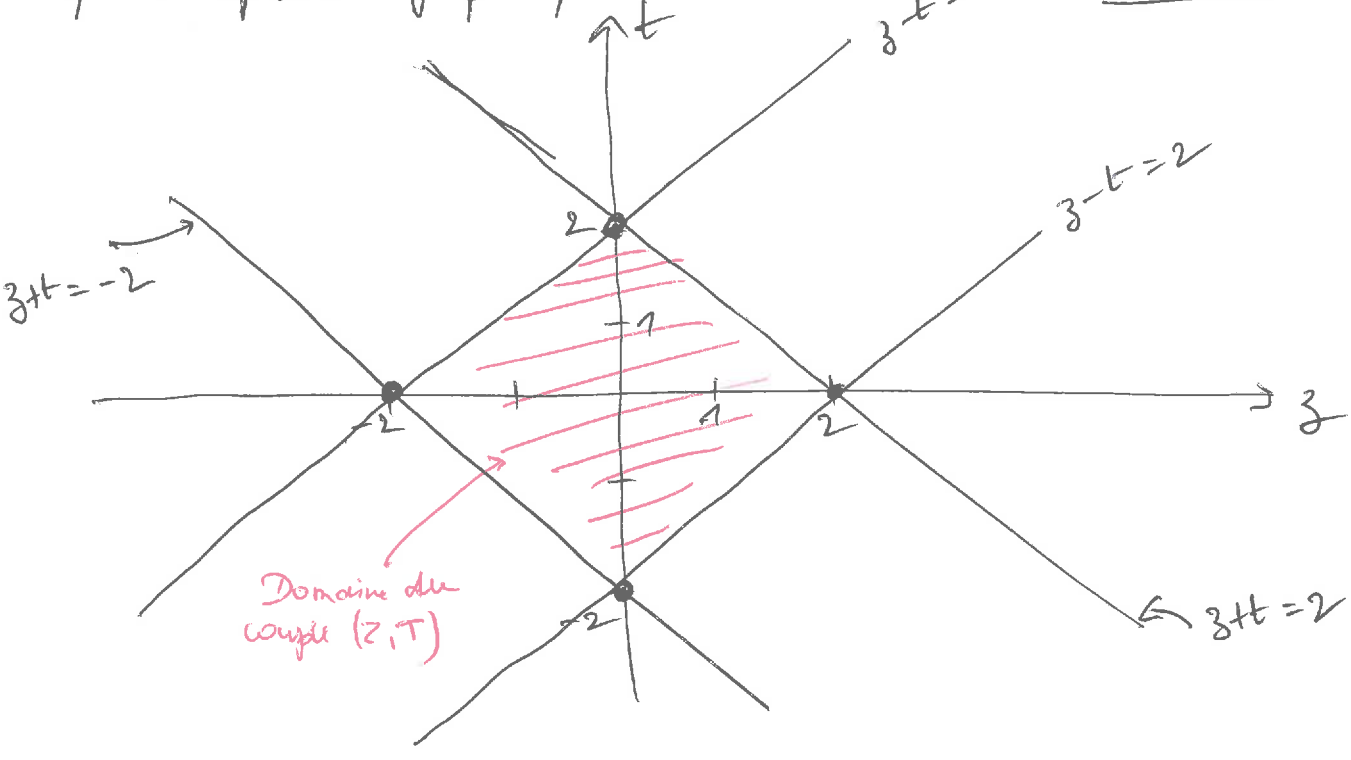
<u>Domaine de (Z,T)</u>

Le domaine de (Z,T) est défini par

$$\begin{cases} z+t > -2 \\ z+t < 2 \\ z-t > -2 \\ z-t < 2 \end{cases}$$

Bijection :	1pt
Jacobien :	1 pt
Densité :	1 pt
Domaine :	1 pt
Total :	4pts

qui se représente graphiquement comme suit



3) La loi marginale de Z est définie par

$$\Pi(z,\cdot) = \int_{\mathbb{R}} \Pi(z,t)\,dt$$

D'après le graphique précédent, on a

$$\Pi(z,\cdot) = \begin{cases} 0 & \text{si } z>2 \text{ ou } z<-2 \\ \displaystyle\int_{-2-z}^{z+2} \frac{1}{8}\,dt & \text{si } z\in[-2,0] \\ \displaystyle\int_{z-2}^{2-z} \frac{1}{8}\,dt & \text{si } z\in[0,2] \end{cases}$$

c'est-à-dire

$$\boxed{\Pi(z,\cdot) = \begin{cases} 0 & \text{si } z\notin[-2,2] \\ \dfrac{z+2}{4} & \text{si } z\in]-2,0] \\ \dfrac{2-z}{4} & \text{si } z\in[0,2[\end{cases}}$$

2p5

4) La fonction caractéristique de la variable aléatoire $Z=X+Y$ est définie par $\phi_Z(t)=E[e^{itZ}] = E[e^{itX}e^{itY}]$

Comme X et Y sont indépendants, e^{itX} et e^{itY} le sont aussi, donc

$$\boxed{\phi_Z(t) = \phi_X(t)\,\phi_Y(t)}$$

La fonction caractéristique d'une loi uniforme sur $[-1,+1]$ est donnée dans la table

$$\phi_X(t) = \frac{e^{it}-e^{-it}}{2it} = \frac{\sin t}{t} = \phi_Y(t)$$

On en déduit $\boxed{\phi_Z(t) = \left(\frac{\sin t}{t}\right)^2}$

Si on fait $a=-2$, $b=2$ et $c=0$ dans $\phi_{a,b,c}(t)$, on obtient

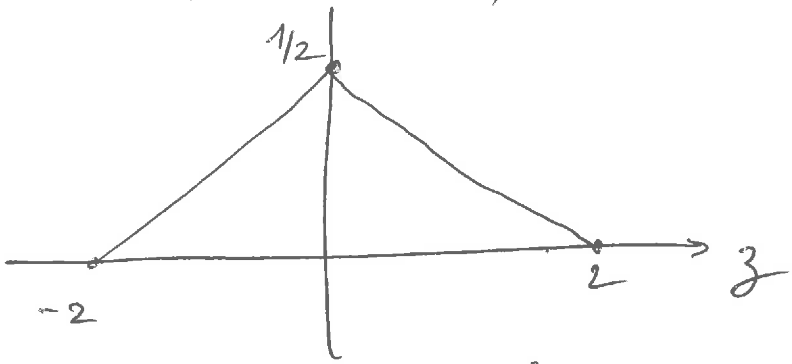
$$\phi_{-2,2,0}(t) = -\cancel{2}\,\frac{2e^{-2it} - 4e^{0} + 2e^{2it}}{4(\cancel{2})(2)\,t^2} = \frac{4 - 2e^{2it} - 2e^{-2it}}{8t^2}$$

$b-c=2$
$b-a=4$
$c-a=2$

Soit $\phi_{-2,2,0}(t) = \dfrac{4-2(2\cos 2t)}{8t^2} = \dfrac{1-\cos 2t}{2t^2} = \boxed{\dfrac{\sin^2 t}{t^2}}$

Donc la fonction caractéristique de Z est $\phi_{-2,2,0}(t)$. On sait qu'une fonction caractéristique caractérise une loi de probabilité. Donc la densité de Z est $\Pi_{-2,2,0}(z)$ qui est représentée ci-dessous

$\Pi(z,\cdot)$



2pt

ce qui correspond au résultat trouvé à la question précédente

Exercice 3

1) On peut obtenir $V = \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Z_1 \\ Z_2 \end{pmatrix}$ par transformation affine du vecteur $X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}$ de la manière suivante

$$V = \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Z_1 \\ Z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}$$

On pose $M = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$ qui est une matrice de rang 2

1pt

car ses deux colonnes ne sont pas proportionnelles. On en déduit

$$V \sim N_4(Mm, M\Sigma M^T)$$

Puisque $m = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, on a $\boxed{V \sim N_4(0, MM^T)}$

1pt

le calcul de MM^T est immédiat

$$MM^T = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

d'où

$$\boxed{V \sim N_4\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix} \right)}$$

1 point

2) Les lois de Y et Z sont des lois marginales du vecteur V. D'après le cours

$$\boxed{Y \sim N\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, A \right) \text{ et } Z \sim N\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, B \right)}$$

1pt

3) $T = Y_1^2 + Y_2^2 = \left(\frac{X_1 + X_2}{2} \right)^2 + \left(\frac{X_1 + X_2}{2} \right)^2 = \boxed{\left(\frac{X_1 + X_2}{\sqrt{2}} \right)^2}$

0,5

Mais $\frac{X_1 + X_2}{\sqrt{2}} = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}}_{\text{matrice de rang 1}} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} \sim N\left(0, \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \right)$

donc $\boxed{\frac{X_1 + X_2}{\sqrt{2}} \sim N(0, 1)}$ 0,5

~~Suite~~ Tsv

7

donc $T = \left(\frac{X_1 + X_2}{\sqrt{2}}\right)^2 \sim \boxed{\chi^2_1}$

qui suit une loi du chi-deux à 1 degré de liberté

1pt