# TD 1 - Probabilités

## Exercice 1

groupe 1 n prélèvement — groupe 2 n prélèvement — groupe $g$ n prélèvement

Nombre total de prélèvements $N = ng$

Si aucun mélange ne contient le corps C, on fait $g$ analyses, donc $X = g$ et $Y = 0$

Si 1 mélange contient le corps C, on fait $g+n$ analyses donc

$X = g+n$ et $Y = \frac{X-g}{n} = 1$

Si $k$ mélanges contiennent le corps C, on fait $g+kn$ analyses donc

$X = g+kn$ et $Y = k$

On voit donc que $Y$ correspond au nombre de mélanges qui contiennent le corps C et $X \in \{g, g+n, \dots, g+gn\} = \{g+kn, k=0,\dots,g\}$

Si on appelle $P_s$ la probabilité qu'un mélange contienne le corps C ($P_s$ = probabilité de succès), on a

$$\boxed{P[Y=k] = C_g^k P_s^k (1-P_s)^{g-k} \quad k \in \{0,\dots,g\}}$$

c'est une loi binomiale $B(g, P_s)$ (en effet on a une répétition de $g$ expériences identiques et indépendantes de type succès/échec et $Y$ est le nombre de succès parmi ces $g$ expériences)

Probabilité du succès

$P_s = P[$1 groupe de $n$ prélèvements contienne le corps C$]$

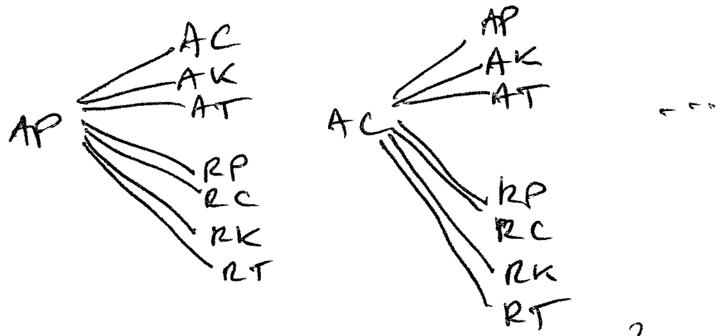
$= 1 - P[$1 groupe ne contient pas le corps C$]$

$= 1 - P[$prélèvement #1 ne contient pas C et prélèvement #2 ne contient pas C ...$]$

$= 1 - q^n$ avec $\boxed{q = 1-p}$ donc $\boxed{P_s = 1 - q^n}$

Exercice 2

1) L'ensemble des résultats d'expériences $\Omega$ est illustré ci-dessous




$$\text{Card } \Omega = 8 \times 7 = 56 \quad \left( = A_8^2 = \frac{8!}{6!} \right)$$

$$P = \frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}} = \frac{A_4^2}{A_8^2} = \frac{4\times 3}{8 \times 7} = \boxed{\frac{3}{14}}$$

2) L'ensemble des résultats d'expériences est


$\Omega = \{ (AP, AC), (AP, AK), (AP, AT), (AC, AK), (AC, AT), (AK, AT), (RP, RC), \dots \}$

$$\text{Card } \Omega = C_8^2 = \frac{8!}{6!\,2!} = \frac{8 \times 7}{2} =$$

$$\text{nombre de cas favorables} = C_4^2 = \frac{4!}{2!\,2!} = \frac{4 \times 3}{2}$$

$$\text{d'où } P = \frac{\frac{\cancel{4}\times\cancel{3}}{2}}{\frac{\cancel{8}\times\cancel{7}}{2}} = \frac{\cancel{4}\times 3}{8 \times 7} = \boxed{\frac{3}{14}}$$

Évidemment, on retrouve le même résultat

3) $P = P(1^{re} \text{ carte est un AS et } 2^{e} \text{ carte est un AS})$

$$= \underbrace{P(2^{e} \text{ carte AS} \mid 1^{re} \text{ carte AS})}_{\text{il reste 7 cartes dont 3 as}} \; \underbrace{P(1^{re} \text{ carte AS})}_{\frac{4}{8} = \frac{1}{2}}$$

donc $= \frac{3}{7}$

$$\text{d'où } P = \frac{3}{7} \times \frac{1}{2} = \boxed{\frac{3}{14}}$$

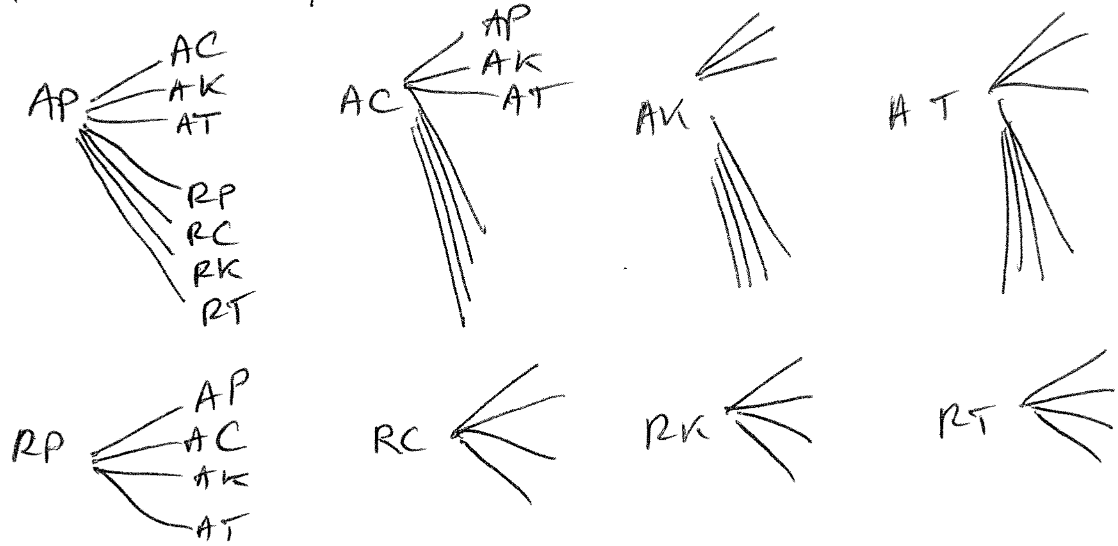
On retrouve le même résultat

Conclusion : il y a plusieurs manières de résoudre un problème
la méthode du 1) est toujours applicable alors que les
méthodes 2) et 3) posent parfois problème

Exercice 3

1) cf exercice précédent $\boxed{P_1 = \frac{3}{14}}$

2) Puisqu'on sait que l'une des deux cartes est un as, l'ensemble des résultats d'expériences se réduit à (si on travaille avec ordre)

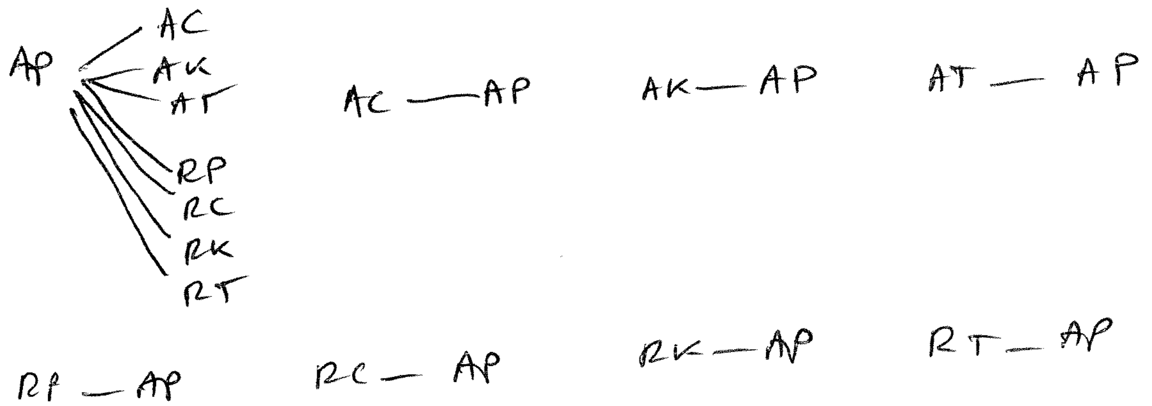



donc $\text{card}\,\Omega = 4 \times 7 + 4 \times 4 = 28 + 16 = 44$

nombre de cas favorables $= 4 \times 3 = 12$

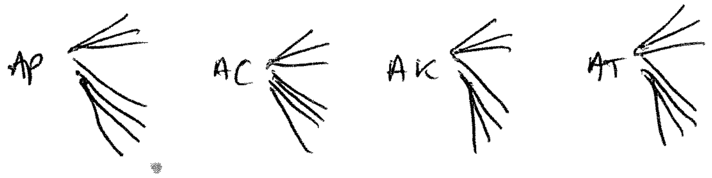
donc $P_2 = \frac{12}{44} = \frac{3}{11}$

3)



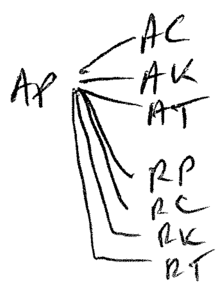

donc $P_3 = \frac{6}{14} = \boxed{\frac{3}{7}}$

4)



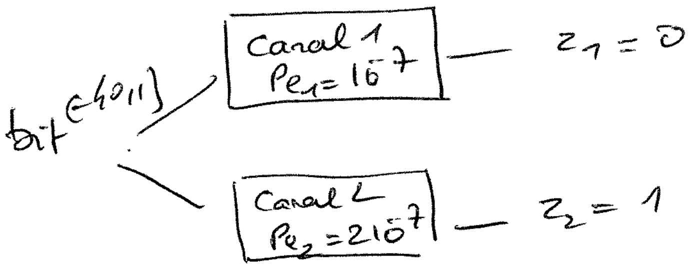

$P_4 = \frac{4 \times 3}{4 \times 7} = \boxed{\frac{3}{7}}$

5)




$P_5 = \boxed{\frac{3}{7}}$

Ex4




$$\pi_0 = P[\text{bit} = 0 \mid z_1 = 0, z_2 = 1] \underset{\text{BAYES}}{=} \frac{P[z_1 = 0, z_2 = 1 \mid \text{bit} = 0)\, P(0)}{P[z_1 = 0, z_2 = 1]}$$

$$= P[\text{bit} = 1 \mid z_1 = 0, z_2 = 1) = \frac{P[z_1 = 0, z_2 = 1 \mid \text{bit} = 1]\, P(1)}{P[z_1 = 0, z_2 = 1]}$$

Il n'est pas necessaire de calculer le dénominateur $P[z_1 = 0, z_2 = 1]$

car

$$\pi_0 \underbrace{\propto}_{\text{proportionnel}} \underbrace{P[z_1 = 0, z_2 = 1 \mid \text{bit} = 0)}_{(1 - Pe_1)\, Pe_2} \underbrace{P(0)}_{0.3}$$

$$\pi_1 \propto \underbrace{P[z_1 = 0, z_2 = 1 \mid \text{bit} = 1)}_{Pe_1 (1 - Pe_2)} \underbrace{P(1)}_{0.7}$$

$\Rightarrow$ Comme les erreurs "~~affectant les~~ liées aux" canaux 1 et 2 sont indépendantes, on a bien $P[z_1 = 0, z_2 = 1 \mid \text{bit} = 0) = P[z_1 = 0 \mid \text{bit} = 0] \times P[z_2 = 1 \mid \text{bit} = 0]$

mais attention $z_1$ et $z_2$ ne sont pas des variables indépendantes !!
Elles ne le sont que conditionnellement à l'entrée des deux canaux