TD 2 Probas

Ex1) 1) $\int f(x)dx = 1 = \int_0^1 kx^a dx = k\left[\frac{x^{a+1}}{a+1}\right]_0^1 = \frac{k}{a+1} \Rightarrow \boxed{k = a+1}$

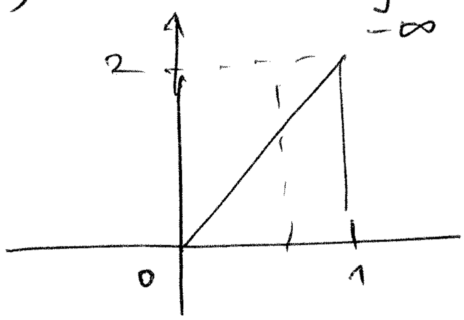
2) $E[X^n] = \int x^n f(x)dx = \int_0^1 (a+1)\, x^{a+n} dx = a+1 \left[\frac{x^{a+n+1}}{a+n+1}\right]_0^1$

$\Rightarrow \boxed{E[X^n] = \frac{a+1}{a+n+1}}$

$\Rightarrow E[X] = \frac{a+1}{a+2}$ et $\operatorname{var} X = E[X^2] - E^2[X] = \boxed{\frac{a+1}{a+3} - \frac{a+1}{(a+2)^2}}$

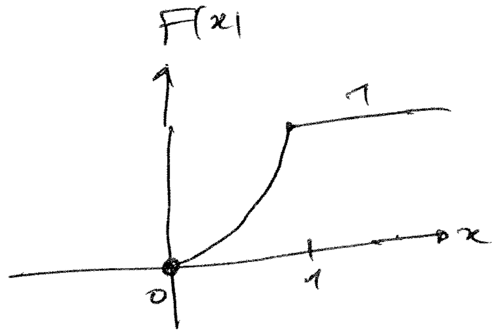
inutile de simplifier

3) $F(x) = P[X < x] = \int_{-\infty}^{x} f(u)du = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x > 1 \\ \underbrace{\int_0^x (a+1)x^a dx}_{x^{a+1}} & \text{si } x \in [0,1] \end{cases}$



pour $a=1$ $f(x) = 2x\, \mathbb{1}_{[0,1]}(x)$

donc $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x^{a+1} & \text{si } x \in [0,1] \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$



pour $a=1$

4) $Y = -\ln X \iff X = e^{-Y}$

donc le changement de variables est bijectif de $]0,1]$ dans D.

D est défini par $0 < x \leq 1 \iff 0 < e^{-y} \leq 1$

$\iff \boxed{y \geq 0}$

Donc $\boxed{D = [0, +\infty[}$

La densité de Y est

$$g(y) = (a+1)\, x^a \Big|_{x=e^{-y}} \times \left|\frac{dx}{dy}\right|$$

donc $g(y) = (a+1)\, e^{-ay}\, e^{-y} = \boxed{(a+1)\, e^{-(a+1)y}\, \mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(y)}$

5) Un résultat utile est $\Gamma(n+1) = n! = \int_0^{+\infty} y^n e^{-y}\, dy$.

$$E[Y^n] = \int y^n g(y)\, dy = \int_0^{+\infty} (a+1)\, y^n\, e^{-(a+1)y}\, dy$$

$$= \int_0^{+\infty} \cancel{(a+1)} \frac{u^n}{(a+1)^n}\, e^{-u}\, \frac{du}{\cancel{a+1}}$$

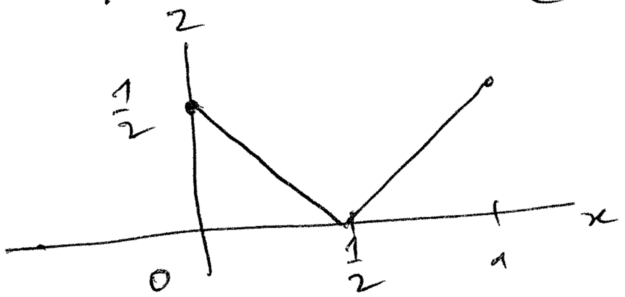
$u = (a+1)\, y$

$$= \frac{1}{(a+1)^n} \underbrace{\int_0^{+\infty} u^n e^{-u}\, du}_{\Gamma(n+1)} = \boxed{\frac{n!}{(a+1)^n}}$$

donc $\boxed{E[Y] = \frac{1}{a+1}}$

$$\mathrm{Var}\, Y = E[Y^2] - E^2[Y] = \frac{2}{(a+1)^2} - \frac{1}{(a+1)^2} = \boxed{\frac{1}{(a+1)^2}}$$

6)



$$z = \left| x - \frac{1}{2} \right| = \begin{cases} x - \frac{1}{2} & \text{si } x \geq \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} - x & \text{si } x < \frac{1}{2} \end{cases}$$

On voit donc que le changement de variables n'est pas bijectif

On a 2 bijections

$g_1 : [0, \frac{1}{2}) \to [0, \frac{1}{2}]$, $x \mapsto z = \frac{1}{2} - x$

$g_2 : [\frac{1}{2}, 1] \to [0, \frac{1}{2}]$, $x \mapsto x - \frac{1}{2} = z$

$x = \frac{1}{2} - z$ et $\left|\frac{dx}{dz}\right| = 1$

$x = \frac{1}{2} + z$ et $\left|\frac{dx}{dz}\right| = 1$

On voit donc que Z est à valeurs dans $[0, \frac{1}{2}]$

Sa densité est

$$h(z) = h_1(z) + h_2(z) \qquad z \in [0, \tfrac{1}{2}]$$

$$h(z) = (a+1)\left(\frac{1}{2}-z\right)^n \times 1 + (a+1)\left(\frac{1}{2}+z\right)^n \times 1$$

$$\boxed{h(z) = (a+1)\left[\left(\frac{1}{2}-z\right)^n + \left(\frac{1}{2}+z\right)^n\right] \mathbb{1}_{[0,\frac{1}{2}]}(z)}$$

Ex2 Soit X le nombre de personnes se connectant au serveur pendant Δ. Par hypothèse $X \sim \mathcal{P}(\theta)$, i.e.,

$$P[X=k] = \frac{\theta^k}{k!} e^{-\theta} \quad k \in \mathbb{N}$$

Soit Y le nombre de personnes déconnectées pendant Δ

Il est clair que $Y \mid X=k \in \{0, 1, \dots, k\}$

0 personne déconnectée

$$P[Y=i \mid X=k] = C_k^i\, p^i (1-p)^{k-i} \quad i \in \{0, \dots, k\}$$

$i \in \{0, \dots, k\}$

Loi binomiale

Il est clair que Y est à valeurs dans $\mathbb{N}$. De plus

$$P[Y=i] = \sum_{k \geq i} \underbrace{P[Y=i \mid X=k]}_{\frac{k!}{i!(k-i)!} p^i (1-p)^{k-i}} \underbrace{P[X=k]}_{\frac{\theta^k}{k!} e^{-\theta}}$$

Le reste est du calcul ...

On pose $j = k-i \iff k = j+i$

$$P[Y=i] = \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{\cancel{(j+i)!}}{i!\, j!} p^i (1-p)^j \frac{\theta^{j+i}}{\cancel{(j+i)!}} e^{-\theta}$$

$$= e^{-\theta} \frac{\theta^i p^i}{i!} \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{(1-p)^j \theta^j}{j!}$$

d'où $P[Y=i] = \frac{(p\theta)^i}{i!} e^{-\theta} \underbrace{\exp[\theta(1-p)]}_{e^{\theta} e^{-\theta p}}$

d'où $\boxed{P[Y=i] = \frac{(p\theta)^i}{i!} e^{-\theta p} \quad i \in \mathbb{N}}$

c'est une loi de Poisson de paramètre $p\theta$, i.e., $\boxed{Y \sim \mathcal{P}(p\theta)}$

Ex3 : Files d'attente

Corrigé sur ma page WEB

$X_1 \sim N(\mu, \sigma_1^2)$
$X_2 \sim N(\mu, \sigma_2^2)$

$Y = \frac{1}{2}(X_1 + X_2)$ et $Z_\omega = \omega X_1 + (1-\omega) X_2$

1) $E[Y] = \frac{1}{2}\left(E[X_1] + E[X_2]\right) = \frac{1}{2}(\mu + \mu) = \boxed{\mu}$

$E[Z_\omega] = \omega\mu + (1-\omega)\mu = \boxed{\mu}$

$\operatorname{Var} Y = \frac{1}{4}\operatorname{var}(X_1 + X_2) \underset{X_1 \text{ et } X_2 \text{ ind}}{=} \frac{1}{4}[\operatorname{Var} X_1 + \operatorname{Var} X_2] = \boxed{\frac{1}{4}(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)}$

$\operatorname{Var} Z_\omega = \boxed{\omega^2 \sigma_1^2 + (1-\omega)^2 \sigma_2^2}$

Cette variance est une fonction quadratique de ω – Elle est minimale pour

$$\frac{\partial \operatorname{Var} Z_\omega}{\partial \omega} = 0 \iff 2\omega\sigma_1^2 - 2(1-\omega)\sigma_2^2 = 0$$

$$\iff \boxed{\omega = \omega^* = \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}}$$

On préfèrera la variable Z_{ω^*} à Y pour l'estimation de μ si $\operatorname{Var} Z_{\omega^*} < \operatorname{Var} Y$ (les deux estimateurs Z_{ω^*} et Y sont non biaisés)

Mais

$$\operatorname{Var} Z_{\omega^*} < \operatorname{Var} Y \iff \underbrace{\left(\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}\right)^2 \sigma_1^2 + \left(\frac{\sigma_1^2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}\right)^2 \sigma_2^2}_{\frac{\sigma_1^2\sigma_2^2(\sigma_2^2+\sigma_1^2)}{(\sigma_1^2+\sigma_2^2)^2} = \frac{\sigma_1^2\sigma_2^2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}} < \frac{\sigma_1^2+\sigma_2^2}{4}$$

d'où

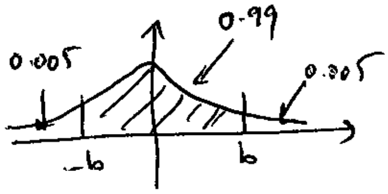
$$\operatorname{Var} Z_{\omega^*} < \operatorname{Var} Y \iff 4\sigma_1^2\sigma_2^2 < (\sigma_1^2+\sigma_2^2)^2$$

ce qui est toujours vérifié car $(\sigma_1^2+\sigma_2^2)^2 - 4\sigma_1^2\sigma_2^2 = (\sigma_1^2 - \sigma_2^2)^2 > 0$

On préfèrera donc toujours Z_{ω^*} à Y

2) D'après 1), $Z_{\omega^*} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma_1^2\sigma_2^2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}\right)$ donc $T = \dfrac{Z_{\omega^*} - \mu}{\frac{\sigma_1\sigma_2}{\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}}} \sim N(0,1)$

Si on appelle $F(t)$ la fonction de répartition de la loi normale $N(0,1)$, les tables de cette loi donnent $b = F^{-1}(0.995)$



②

et donc $\quad P[-b < T < b] = 0.99 \quad$ avec $\; b = F^{-1}(0.995)$

Pour avoir $P[-b < T < b] > 0.99$ il suffit de choisir $b > F^{-1}(0.995)$

Mais $\quad -b < T < b \iff -F^{-1}(0.995) < \dfrac{Z_{w^*} - \mu}{\frac{\sigma_1\sigma_2}{\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}}} < F^{-1}(0.995)$

$$\iff \mu - \frac{F^{-1}(0.995)\sigma_1\sigma_2}{\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}} < Z_{w}^* < \mu + \frac{\sigma_1\sigma_2}{\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}} F^{-1}(0.995)$$

Un intervalle de confiance pour Z_{w^*} avec une probabilité minimale 0.99 est donc $\left[\mu - \dfrac{F^{-1}(0.995)\sigma_1\sigma_2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}, \mu + \dfrac{\sigma_1\sigma_2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2} F^{-1}(0.995)\right]$

d'où
$$\boxed{a = \frac{\sigma_1\sigma_2}{\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}} F^{-1}(0.995)}$$