TD3

CORRECTION EXERCICE 1

**Exercice** 1

1) $X_1$ et $X_2$ suivent des lois uniformes sur $\{1, ..., N\}$ tandis que le couple $(X_1, X_2)$ suit une loi uniforme sur $\{(i,j), i \in \{1, ..., N\}, j \in \{1, ..., N\}, i \neq j\}$, c'est-à-dire

$$P[X_1 = i, X_2 = j] = \frac{1}{N(N-1)} \qquad i \in \{1, ..., N\}, j \in \{1, ..., N\}, i \neq j$$

2) Il est clair que $E[X_1] = E[X_2] = \frac{N+1}{2}$. De plus

$$\begin{aligned} E[X_1 X_2] &= \sum_{i \neq j} ij \frac{1}{N(N-1)} \\ &= \frac{1}{N(N-1)} \sum_{i \neq j} ij \\ &= \frac{1}{N(N-1)} \left[ \sum_{i,j} ij - \sum_i i^2 \right] \end{aligned}$$

Des calculs simples permettent d'obtenir

$$E[X_1 X_2] = \frac{(N+1)(3N+2)}{12}$$

et par suite

$$\operatorname{cov}(X_1, X_2) = -\frac{N+1}{12}$$

3) Le changement de variables est tel que

$$\begin{cases} Z = X_1 - X_2 \\ U = X_1 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} X_1 = U \\ X_2 = U - Z \end{cases}$$

donc il est bijectif de

$$\{(i,j), i \in \{1, ..., N\}, j \in \{1, ..., N\}, i \neq j\}$$

dans

$$\{(u,z), u \in \{1, ..., N\}, z \in \{u-N, ..., u-1\}, z \neq 0\}$$

Le couple $(Z, U)$ suit une loi uniforme sur son ensemble de définition.
$Z$ est à valeurs dans $\{-(N-1), ..., -2, -1\} \cup \{1, 2, ..., N-1\}$ et
On a

$$P[Z = z] = \frac{N - |z|}{N(N-1)} \qquad z \in \{-(N-1), ..., -2, -1\} \cup \{1, 2, ..., N-1\}$$



1/3

# $\boxed{\text{TP 3 Probabilités}}$

Ex1 : correction sur ma page et après l'énoncé

Ex2 : $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ donc $P[X=n] = \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda} \quad n \in \mathbb{N}$

1) la loi de $Y$ sachant que $X=n$ est

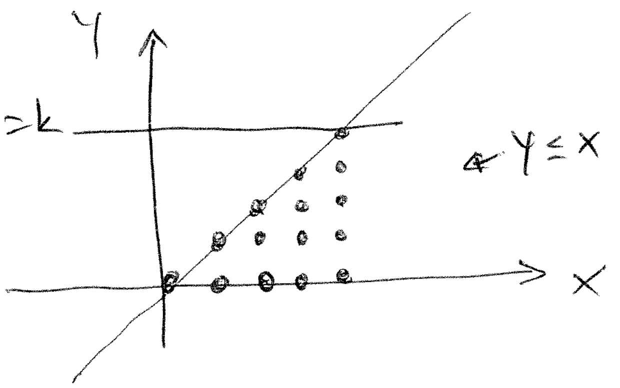
$$P[Y=k \mid X=n] = C_n^k p^k (1-p)^{n-k} \qquad k \in \{0, \dots, n\}$$

↑
Loi binomiale
Succès = voiture conduite par une femme (de probabilité $p$)

2) $P[Y=k, X=n] = P[Y=k \mid X=n] \, P[X=n]$ $\qquad n \in \mathbb{N}, \; k \in \{0, \dots, n\}$

$$= \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k} \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda}$$

3) $P[Y=k]$ ?




$$P[Y=k] = \sum_{n \geq k} P[Y=k, X=n]$$

$$= \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k} \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda}$$

On pose
$m = n-k$
$n = m+k$

$$\longrightarrow \; = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{\cancel{(m+k)!}}{k!\, m!} p^k (1-p)^m \frac{\lambda^{m+k}}{\cancel{(m+k)!}} e^{-\lambda}$$

$$= \frac{p^k}{k!} \lambda^k e^{-\lambda} \underbrace{\sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(1-p)^m}{m!} \lambda^m}_{\exp[\lambda(1-p)] = e^{\lambda} e^{-\lambda p}}$$

donc $P[Y=k] = \frac{(\lambda p)^k}{k!} e^{-\lambda p} \quad k \in \mathbb{N}$

donc $\boxed{Y \sim P(\lambda p)}$

4) Par symétrie $Z = X - Y$ est le nombre de voitures conduites par des hommes passant au péage en une heure - donc

$$Z \sim P(\lambda q)$$

$q = 1-p$ probabilité qu'une voiture soit conduite par un homme

5) $P[Z=i, X=k] = P[X-Y=i, Y=k]$

$$= P[X = i+k, Y=k]$$

$$\underset{\text{question 2)}}{=} \frac{\cancel{(i+k)!}}{k!\, i!} p^k (1-p)^i \frac{\lambda^{i+k}}{\cancel{(i+k)!}} \underbrace{e^{-\lambda}}_{e^{-\lambda p}\, e^{\lambda(p-1)}}$$

$$= \underbrace{\frac{(\lambda p)^k}{k!} e^{-\lambda p}}_{P[Y=k]} \times \underbrace{\frac{[\lambda(1-p)]^i}{i!} e^{-\lambda q}}_{P[Z=i]}$$

donc $\boxed{\text{Y et Z sont des variables aléatoires indépendantes}}$