

---

EXAMEN PROBABILITÉS/STATISTIQUE - 2GEA

Lundi 14 Novembre 2016

Partiel sans document (Une feuille A4 recto-verso autorisée)

---

**Exercice 1: Loi géométrique (6 points)**

On considère une variable aléatoire  $X$  de loi géométrique de paramètre  $p \in ]0, 1[$  définie dans  $\mathbb{N}^* = \{n \in \mathbb{N}, n \geq 1\}$  par

$$P[X = x_i] = p(1-p)^{x_i-1}, \quad x_i = 1, 2, \dots$$

Une telle loi est de moyenne  $E[X] = \frac{1}{p}$ , de variance  $\text{Var}(X) = \frac{q}{p^2}$  avec  $q = 1 - p$  et de fonction caractéristique  $\phi(t) = \frac{pe^{it}}{1 - qe^{it}}$  (voir tables) et on adoptera la notation classique  $X \sim \mathcal{G}(p)$ .

1. Montrer que  $P[X > k] = q^k, \forall k \in \mathbb{N}$  (1pt).
2. Montrer qu'une variable aléatoire  $X$  à valeurs dans  $\mathbb{N}^*$  telle que  $P[X > k] = q^k, \forall k \in \mathbb{N}$  est une loi géométrique (on pourra exprimer  $P[X = k]$  en fonction de  $P[X > k]$  et de  $P[X > k - 1]$ ) (1pt).
3. On considère deux variables aléatoires indépendantes  $X$  et  $Y$  de même loi géométrique de paramètre  $p$  (i.e.,  $X \sim \mathcal{G}(p)$  et  $Y \sim \mathcal{G}(p)$ ) et le minimum de ces deux variables  $Z = \min\{X, Y\}$ . Déterminer  $P[Z > k]$  et en déduire que  $Z$  suit une loi géométrique dont on précisera le paramètre (2pts).
4. On considère la variable aléatoire  $Z = X + Y - 2$ , où  $X$  et  $Y$  sont deux variables aléatoires indépendantes de même loi géométrique de paramètre  $p$  (comme dans la question précédente). Déterminer la fonction caractéristique de  $Z$  et en déduire sa loi en utilisant les tables de lois (2pts).

**Exercice 2: Estimation (8 points)**

On considère une suite de variables aléatoires  $X_i$  indépendantes et de même loi de densité

$$p(x_i; \theta) = \begin{cases} \frac{1}{\theta} x_i^{\frac{1}{\theta}-1} & \text{si } x_i \in ]0, 1[ \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

où  $\theta > 0$  est un paramètre inconnu.

1. Montrer que la loi de  $Y_i = -\ln X_i$  est une loi gamma dont on déterminera les paramètres (2 pts).
2. Déterminer la vraisemblance de l'échantillon  $(X_1, \dots, X_n)$  et montrer qu'elle admet un maximum global unique par rapport à une valeur de  $\theta$  que l'on précisera. En déduire l'estimateur du maximum de vraisemblance du paramètre  $\theta$  noté  $\hat{\theta}_{MV}$  et exprimer cet estimateur en fonction de l'échantillon  $(Y_1, \dots, Y_n)$  (2pts).
3. L'estimateur  $\hat{\theta}_{MV}$  est-il sans biais et convergent (2pts) ?
4. Déterminer la borne de Cramér-Rao pour les estimateurs non-biaisés de  $\theta$ . L'estimateur  $\hat{\theta}_{MV}$  est-il l'estimateur efficace du paramètre  $\theta$  (1pt) ?
5. Déterminer  $E[X_i]$  et en déduire un estimateur des moments du paramètre  $\theta$  (1 pt).

### Exercice 3: Test statistique (7 points)

On considère une suite de variables aléatoires  $X_i$  indépendantes et de même loi de densité

$$p(x_i; \theta) = \begin{cases} \frac{1}{\theta} x_i^{\frac{1}{\theta}-1} & \text{si } x_i \in ]0, 1[ \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On désire tester les deux hypothèses

$$\begin{cases} H_0 : \theta = \theta_0 \\ H_1 : \theta = \theta_1 \end{cases}$$

avec  $\theta_1 > \theta_0$ .

1. Vérifier que la statistique du test de Neyman-Pearson peut s'écrire  $T = \sum_{i=1}^n Y_i$  avec  $Y_i = -\ln X_i$  et déterminer la région critique associée (1pt).
2. On admettra que  $Y_i$  suit une loi gamma  $\Gamma\left(\frac{1}{\theta}, 1\right)$  (voir tables). En déduire que  $T$  suit également une loi gamma dont on déterminera les paramètres (1pt).
3. On suppose que  $n$  est suffisamment grand pour appliquer le théorème de la limite centrale à la variable aléatoire  $T$ .
  - Quelle est la loi approchée de  $T$  résultant de l'application de ce théorème ? (1pt)
  - En utilisant la loi approchée de  $T$  trouvée à la question précédente, déterminer le risque de première espèce  $\alpha$  en fonction du seuil du test noté  $S_\alpha$ , de  $n$ ,  $\theta_0$  et de la fonction de répartition de la loi normale  $\mathcal{N}(0, 1)$  notée  $F$ . Toujours à l'aide de la loi approchée de  $T$  trouvée à la question précédente, en déduire la puissance du test  $\pi$  en fonction du seuil du test noté  $S_\alpha$ , de  $n$ ,  $\theta_1$  et de la fonction  $F$  (1pt).
  - En déduire les courbes COR de ce test et analyser leur forme en fonction de  $n$ , et des valeurs relatives de  $\theta_0$  et  $\theta_1$  (3pts).

## LOIS DE PROBABILITÉ DISCRÈTES

**m** : moyenne     $\sigma^2$  : variance    **F. C.** : fonction caractéristique

$p_k = P[X = k]$      $p_{1,\dots,m} = P[X_1 = k_1, \dots, X_m = k_m]$

LOI	Probabilités	m	$\sigma^2$	F. C.
Uniforme	$p_k = \frac{1}{n}$ $k \in \{1, \dots, n\}$	$\frac{n+1}{2}$	$\frac{n^2-1}{12}$	$\frac{e^{it}(1 - e^{itn})}{n(1 - e^{it})}$
Bernoulli	$p_1 = P[X = 1] = p$ $p_0 = P[X = 0] = q$ $p \in [0, 1]$ $q = 1 - p$	$p$	$pq$	$pe^{it} + q$
Binomiale $B(n, p)$	$p_k = C_n^k p^k q^{n-k}$ $p \in [0, 1]$ $q = 1 - p$ $k \in \{0, 1, \dots, n\}$	$np$	$npq$	$(pe^{it} + q)^n$
Binomiale négative	$p_k = C_{n+k-1}^{n-1} p^n q^k$ $p \in [0, 1]$ $q = 1 - p$ $k \in \mathbb{N}$	$n \frac{q}{p}$	$n \frac{q}{p^2}$	$\left(\frac{p}{1 - qe^{it}}\right)^n$
Multinomiale	$p_{1,\dots,m} = \frac{n!}{k_1! \dots k_m!} p_1^{k_1} \dots p_m^{k_m}$ $p_j \in [0, 1]$ $q_j = 1 - p_j$ $k_j \in \{0, 1, \dots, n\}$ $\sum_{j=1}^m k_j = n$ $\sum_{j=1}^m p_j = 1$	$np_j$	Variance : $np_j q_j$ Covariance : $-np_j p_k$	$\left(\sum_{j=1}^m p_j e^{it}\right)^n$
Poisson $P(\lambda)$	$p_k = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$ $\lambda > 0$ $k \in \mathbb{N}$	$\lambda$	$\lambda$	$\exp[\lambda(e^{it} - 1)]$
Géométrique	$p_k = pq^{k-1}$ $p \in [0, 1]$ $q = 1 - p$ $k \in \mathbb{N}^*$	$\frac{1}{p}$	$\frac{q}{p^2}$	$\frac{pe^{it}}{1 - qe^{it}}$

## LOIS DE PROBABILITÉ CONTINUES

m : moyenne     $\sigma^2$  : variance    F. C. : fonction caractéristique

LOI	Densité de probabilité	m	$\sigma^2$	F. C.
Uniforme	$f(x) = \frac{1}{b-a}$ $x \in ]a, b[$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$	$\frac{e^{itb} - e^{ita}}{it(b-a)}$
Gamma $\Gamma(\theta, \nu)$	$f(x) = \frac{\theta^\nu}{\Gamma(\nu)} e^{-\theta x} x^{\nu-1}$ $\theta > 0, \nu > 0$ $x \geq 0$	$\frac{\nu}{\theta}$	$\frac{\nu}{\theta^2}$	$\frac{1}{(1 - i\frac{t}{\theta})^\nu}$
Première loi de Laplace	$f(x) = \frac{1}{2} e^{- x }$	0	2	$\frac{1}{1+t^2}$
Normale $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$	$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$	m	$\sigma^2$	$e^{imt - \frac{\sigma^2 t^2}{2}}$
Khi <sub>2</sub> $\chi_\nu^2$ $\Gamma(\frac{1}{2}, \frac{\nu}{2})$	$f(x) = k e^{-\frac{x}{2}} x^{\frac{\nu}{2}-1}$ $k = \frac{1}{2^{\frac{\nu}{2}} \Gamma(\frac{\nu}{2})}$ $\nu \in \mathbb{N}^*, x \geq 0$	$\nu$	$2\nu$	$\frac{1}{(1-2it)^{\frac{\nu}{2}}}$
Cauchy $c_{\lambda, \alpha}$	$f(x) = \frac{1}{\pi\lambda \left(1 + \left(\frac{x-\alpha}{\lambda}\right)^2\right)}$ $\lambda > 0, \alpha \in \mathbb{R}$	(-)	(-)	$e^{i\alpha t - \lambda t }$
Beta	$f(x) = kx^{a-1} (1-x)^{b-1}$ $k = \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}$ $a > 0, b > 0, x \in ]0, 1[$	$\frac{a}{a+b}$	$\frac{ab}{(a+b)^2(a+b+1)}$	(*)