EXAMEN PROBABILITÉS - 1TR

Mercredi 22 Octobre 2014 (8h-9h45)

Partiel sans document (Une feuille A4 recto-verso autorisée)

Exercice 1: Couple de variables aléatoires continues

On considère un couple de variables aléatoires (X, Y) de densité de probabilité

$$p(x,y) = \begin{cases} e^{-y} \text{ si } y \geq x \geq 0 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

1. Déterminer les densités marginales de X et Y et indiquer les lois obtenues en s'aidant des tables de lois. En déduire les moyennes $E[X], E[Y]$ et les variances $\text{Var}[X], \text{Var}[Y]$.
2. Déterminer la loi du couple (Z, T) avec $Z = Y - X$ et $T = X$. En déduire la loi de Z.
3. Déterminer la loi conditionnelle de $X|Y = y$ et $E[X|Y]$. En déduire $E[X]$ en utilisant le théorème des espérances conditionnelles. Vérifier qu'on obtient le même résultat qu'à la première question.

Exercice 2: Couple de variables aléatoires discrètes

On considère deux variables aléatoires indépendantes X et Y de lois de Poisson de paramètres λ et μ, c'est-à-dire telles que

$$P[X = i] = \frac{\lambda^i}{i!}e^{-\lambda},\ i \in \mathbb{N} \quad \text{et} \quad P[Y = j] = \frac{\mu^j}{j!}e^{-\mu}\ j \in \mathbb{N}.$$

1. Déterminer la loi du couple (Z, T) avec $Z = X + Y$ et $T = X$. En déduire la loi de Z ainsi que sa moyenne $E[Z]$ et sa variance $\text{Var}[Z]$.
   On rappelle que $(x + y)^m = \sum_{n=0}^{m} \mathcal{C}_m^n x^n y^{m-n}$ *avec* $\mathcal{C}_m^n = \frac{m!}{n!(m-n)!}$.
2. Déterminer la fonction caractéristique de Z et retrouver la loi de Z (cf question précédente).
3. Déterminer la loi conditionnelle de $Z|T = t$ et $E[Z|T]$. En déduire $E[Z]$ en utilisant le théorème des espérances conditionnelles. Vérifier qu'on obtient le même résultat qu'à la première question.

Exercice 3: Approximation de la loi d'une somme de variables binaires

On considère une suite de variables aléatoires indépendantes $(X_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ (avec $\mathbb{N}^* = \mathbb{N}\backslash\{0\}$) de lois de Bernoulli telles que

$$P[X_i = 1] = p \quad \text{et} \quad P[X_i = 0] = q$$

avec $p + q = 1$.

1. Quelle est la loi de $Y_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$?
2. Que donne l'application du théorème de la limite centrale à la variable aléatoire Y_n ? En déduire qu'on peut pour n "grand" approcher la loi de Y_n par une loi normale dont on précisera les paramètres. En déduire une approximation de $P[Y_n < a]$ à l'aide de la fonction de répartition F d'une loi normale centrée réduite définie par

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-u^2/2} du.$$