

---

EXAMEN PROBABILITÉS - 1SN

Mardi 23 Octobre 2018 (14h-15h30)

Partiel sans document (Une feuille A4 recto-verso autorisée)

---

**Exercice 1 (6 points)**

On considère trois variables aléatoires (mutuellement) indépendantes  $X, Y$  et  $Z$  de lois de Bernoulli telles que

$$\begin{aligned} P[X = 1] &= 1 - P[X = 0] = p \\ P[Y = 1] &= 1 - P[Y = 0] = p \\ P[Z = 1] &= 1 - P[Z = 0] = \alpha \end{aligned} \quad (1)$$

avec  $p \in ]0, 1[$  et  $\alpha \in ]0, 1[$ . On définit alors la variable aléatoire  $T$  comme suit

$$T = \begin{cases} X & \text{si } Z = 1 \\ Y & \text{si } Z = 0 \end{cases} \quad (2)$$

1. Montrer que  $T$  suit une loi de Bernoulli dont on déterminera le paramètre.
2. Quelle est la loi du couple  $(T, X)$  ? (on pourra exprimer les valeurs possibles du couple  $(T, X)$  en fonction de celles de  $X, Y$  et  $Z$  et utiliser l'indépendance entre ces variables aléatoires).
3. Déterminer la covariance et le coefficient de corrélation du couple  $(T, X)$ .
4. Les variables aléatoires  $T$  et  $X$  sont-elles indépendantes ? En déduire l'intérêt pratique de cet exercice.

**Exercice 2: Changement de variables (8 points)**

On considère deux variables aléatoires indépendantes  $X$  et  $Y$  de lois uniformes sur l'intervalle  $] -1, +1[$ , c'est-à-dire de densités

$$p(x, \cdot) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si } x \in ] -1, 1[ \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad \text{et} \quad p(\cdot, y) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si } y \in ] -1, 1[ \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Déterminer la loi du couple  $(X, Y)$ .
2. On définit les deux variables aléatoires  $Z = X + Y$  et  $T = X - Y$ . Quelle est la loi du couple  $(Z, T)$  ? (on accordera une attention particulière au domaine de définition de ce couple que l'on représentera graphiquement).
3. Déduire de la question précédente la loi marginale de  $Z$  et représenter la graphiquement.
4. Afin de vérifier le résultat précédent, déterminer la fonction caractéristique de  $Z = X + Y$  et montrer qu'elle peut s'écrire

$$\phi_{a,b,c}(t) = -2 \frac{(b-c)e^{iat} - (b-a)e^{ict} + (c-a)e^{ibt}}{(b-a)(c-a)(b-c)t^2}$$

avec  $a = -2, b = 2$  et  $c = 0$ . La densité d'une loi de probabilité de fonction caractéristique  $\phi_{a,b,c}(t)$  est représentée sur la figure 1. Montrer qu'on retrouve la densité de  $Z$  trouvée à la question précédente.

*Rappel: on rappelle les deux formules trigonométriques suivantes*

$$\sin^2(t) = \frac{1 - \cos(2t)}{2} \quad \text{et} \quad \cos^2(t) = \frac{1 + \cos(2t)}{2}$$

### Triangulaire

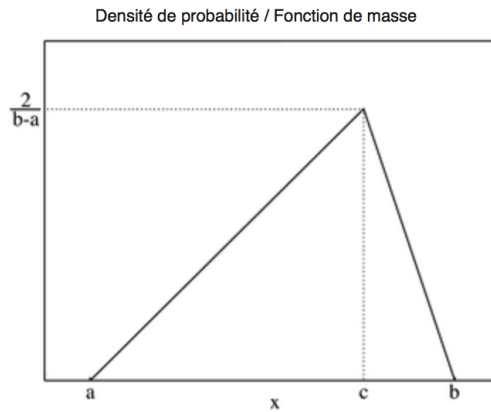


Figure 1: Densité de probabilité  $\pi_{a,b,c}(x)$  associée à la fonction caractéristique  $\phi_{a,b,c}(t)$ .

### Exercice 3: Vecteurs Gaussiens (6 points)

On considère un vecteur aléatoire  $\mathbf{X} = (X_1, X_2, X_3, X_4)^T$  de loi normale à quatre dimensions de vecteur moyenne  $\mathbf{m} = (0, 0, 0, 0)^T$  et de matrice de covariance égale à la matrice identité. On considère les deux matrices  $\mathbf{A}$  et  $\mathbf{B}$  définies par

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \text{ et } \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & -1/2 \end{pmatrix}.$$

On définit les vecteurs  $\mathbf{Y} = (Y_1, Y_2)^T = \mathbf{A}(X_1, X_2)^T$  et  $\mathbf{Z} = (Z_1, Z_2)^T = \mathbf{B}(X_3, X_4)^T$ .

1. Quelle est la loi du vecteur  $\mathbf{V} = (\mathbf{Y}^T, \mathbf{Z}^T)^T = (Y_1, Y_2, Z_1, Z_2)^T$  ?
2. Déterminer les lois des vecteurs  $\mathbf{Y}$  et  $\mathbf{Z}$ . Ces vecteurs sont-ils indépendants ?
3. Quelle est la loi de  $T = 2\|\mathbf{Y}\|^2 = 2(Y_1^2 + Y_2^2)$  ?

## LOIS DE PROBABILITÉ DISCRÈTES

$m$  : moyenne     $\sigma^2$  : variance    **F. C.** : fonction caractéristique

$p_k = P[X = k]$      $p_{1,\dots,m} = P[X_1 = k_1, \dots, X_m = k_m]$

LOI	Probabilités	$m$	$\sigma^2$	F. C.
Uniforme	$p_k = \frac{1}{n}$ $k \in \{1, \dots, n\}$	$\frac{n+1}{2}$	$\frac{n^2-1}{12}$	$\frac{e^{it}(1 - e^{itn})}{n(1 - e^{it})}$
Bernoulli	$p_1 = P[X = 1] = p$ $p_0 = P[X = 0] = q$ $p \in [0, 1]$ $q = 1 - p$	$p$	$pq$	$pe^{it} + q$
Binomiale $B(n, p)$	$p_k = C_n^k p^k q^{n-k}$ $p \in [0, 1]$ $q = 1 - p$ $k \in \{0, 1, \dots, n\}$	$np$	$npq$	$(pe^{it} + q)^n$
Binomiale négative	$p_k = C_{n+k-1}^{n-1} p^n q^k$ $p \in [0, 1]$ $q = 1 - p$ $k \in \mathbb{N}$	$n \frac{q}{p}$	$n \frac{q}{p^2}$	$\left(\frac{p}{1 - qe^{it}}\right)^n$
Multinomiale	$p_{1,\dots,m} = \frac{n!}{k_1! \dots k_m!} p_1^{k_1} \dots p_m^{k_m}$ $p_j \in [0, 1]$ $q_j = 1 - p_j$ $k_j \in \{0, 1, \dots, n\}$ $\sum_{j=1}^m k_j = n$ $\sum_{j=1}^m p_j = 1$	$np_j$	Variance : $np_j q_j$ Covariance : $-np_j p_k$	$\left(\sum_{j=1}^m p_j e^{it}\right)^n$
Poisson $P(\lambda)$	$p_k = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$ $\lambda > 0$ $k \in \mathbb{N}$	$\lambda$	$\lambda$	$\exp[\lambda(e^{it} - 1)]$
Géométrique	$p_k = pq^{k-1}$ $p \in [0, 1]$ $q = 1 - p$ $k \in \mathbb{N}^*$	$\frac{1}{p}$	$\frac{q}{p^2}$	$\frac{pe^{it}}{1 - qe^{it}}$

## LOIS DE PROBABILITÉ CONTINUES

m : moyenne     $\sigma^2$  : variance    F. C. : fonction caractéristique

LOI	Densité de probabilité	m	$\sigma^2$	F. C.
Uniforme	$f(x) = \frac{1}{b-a}$ $x \in ]a, b[$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$	$\frac{e^{itb} - e^{ita}}{it(b-a)}$
Gamma $\Gamma(\theta, \nu)$	$f(x) = \frac{\theta^\nu}{\Gamma(\nu)} e^{-\theta x} x^{\nu-1}$ $\theta > 0, \nu > 0$ $x \geq 0$ avec $\Gamma(n+1) = n! \forall n \in \mathbb{N}$	$\frac{\nu}{\theta}$	$\frac{\nu}{\theta^2}$	$\frac{1}{(1 - i\frac{t}{\theta})^\nu}$
Inverse gamma IG( $\theta, \nu$ )	$f(x) = \frac{\theta^\nu}{\Gamma(\nu)} e^{-\frac{\theta}{x}} \frac{1}{x^{\nu+1}}$ $\theta > 0, \nu > 0$ $x \geq 0$ avec $\Gamma(n+1) = n! \forall n \in \mathbb{N}$	$\frac{\theta}{\nu-1}$ si $\nu > 1$	$\frac{\theta^2}{(\nu-1)^2(\nu-2)}$ si $\nu > 2$	(*)
Première loi de Laplace	$f(x) = \frac{1}{2} e^{- x }$	0	2	$\frac{1}{1+t^2}$
Normale $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$	$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$	m	$\sigma^2$	$e^{imt - \frac{\sigma^2 t^2}{2}}$
Khi <sub>2</sub> $\chi_\nu^2$ $\Gamma(\frac{1}{2}, \frac{\nu}{2})$	$f(x) = k e^{-\frac{x}{2}} x^{\frac{\nu}{2}-1}$ $k = \frac{1}{2^{\frac{\nu}{2}} \Gamma(\frac{\nu}{2})}$ $\nu \in \mathbb{N}^*, x \geq 0$	$\nu$	$2\nu$	$\frac{1}{(1-2it)^{\frac{\nu}{2}}}$
Cauchy $c_{\lambda, \alpha}$	$f(x) = \frac{1}{\pi\lambda \left(1 + \left(\frac{x-\alpha}{\lambda}\right)^2\right)}$ $\lambda > 0, \alpha \in \mathbb{R}$	(-)	(-)	$e^{iat - \lambda t }$
Beta $B(a, b)$	$f(x) = kx^{a-1} (1-x)^{b-1}$ $k = \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}$ $a > 0, b > 0$ $x \in ]0, 1[$ avec $\Gamma(n+1) = n! \forall n \in \mathbb{N}$	$\frac{a}{a+b}$	$\frac{ab}{(a+b)^2(a+b+1)}$	(*)