EXAMEN PROBABILITÉS - 1HY

Lundi 22 Octobre 2018 (8h-9h45)

Partiel sans document (Une feuille A4 recto-verso autorisée)

Exercice 1 (5 points)

On considère trois variables aléatoires (mutuellement) indépendantes X_1, X_2 et X_3 de lois de Poisson de paramètres λ_1, λ_2 et λ_3, ce que l'on notera

$$X_1 \sim \mathcal{P}(\lambda_1), X_2 \sim \mathcal{P}(\lambda_2) \text{ et } X_3 \sim \mathcal{P}(\lambda_3) \tag{1}$$

avec $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$ et $\lambda_3 > 0$. On définit alors les variables aléatoires Z et T comme suit

$$Z = X_1 + X_2 \text{ et } T = X_2 + X_3. \tag{2}$$

1. Déterminer la fonction caractéristique de Z et en déduire les lois de Z et T.
2. Déterminer la covariance et le coefficient de corrélation du couple (Z, T).
3. Les variables aléatoires Z et T sont-elles indépendantes (justifier) ? Quel est à votre avis l'intérêt pratique de cet exercice ?

Exercice 2: Changement de variables (9 points)

On considère deux variables aléatoires indépendantes X et Y de lois uniformes sur l'intervalle $]-1, +1[$, c'est-à-dire de densités

$$p(x,.) = \begin{cases} \frac{1}{2} \text{ si } x \in]-1,1[\\ 0 \text{ sinon} \end{cases} \quad \text{et} \quad p(.,y) = \begin{cases} \frac{1}{2} \text{ si } y \in]-1,1[\\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

1. Déterminer la loi du couple (X, Y).
2. On définit les deux variables aléatoires $Z = \frac{Y}{X}$ et $T = X$. Quelle est la loi du couple (Z, T) ? (on accordera une attention particulière au domaine de définition de ce couple que l'on représentera graphiquement).
3. Déduire de la question précédente la loi marginale de Z. Représenter la graphiquement (on pourra vérifier que l'intégrale de cette densité est égale à 1 pour éviter une éventuelle erreur de calcul).
4. Déterminer la covariance du couple (Z, T) (on pourra utiliser le lien entre les variables Z et T et les variables X et Y). Les variables aléatoires Z et T sont-elles indépendantes ?

Exercice 3: Vecteurs Gaussiens (6 points)

On considère un vecteur Gaussien $\boldsymbol{X} = (X_1, X_2, X_3)^T$ de vecteur moyenne $\boldsymbol{m} = (0,0,0)^T$ et de matrice de covariance $\boldsymbol{\Sigma}$ définie comme suit

$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

1. On pose $U = X_1$ et $V = X_2 - aX_1$, où $a \in \mathbb{R}$. Quelle est la loi du couple (U, V) ? Pour quelle valeur de a les variables U et V sont-elles indépendantes (justifier avec soin votre réponse).
2. Déterminer les densités de X_1 et du couple de (X_1, X_2). En utilisant la définition d'une densité conditionnelle, déterminer la densité de X_2 sachant $X_1 = x_1$ et en déduire qu'elle correspond à une loi normale $\mathcal{N}(x_1, 3)$. On rappelle le résultat suivant

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

LOIS DE PROBABILITÉ DISCRÈTES
$\mathbf{m}$: moyenne σ^2 : variance **F. C. :** fonction caractéristique
$p_k = P[X = k]$ $p_{1,\ldots,m} = P[X_1 = k_1, \ldots, X_m = k_m]$

LOI	Probabilités	m	σ^2	F. C.
Uniforme	$p_k = \frac{1}{n}$ $k \in \{1, \ldots, n\}$	$\frac{n+1}{2}$	$\frac{n^2-1}{12}$	$\dfrac{e^{it}\left(1-e^{itn}\right)}{n\left(1-e^{it}\right)}$
Bernoulli	$p_1 = P[X=1] = p$ $p_0 = P[X=0] = q$ $p \in [0,1] \quad q = 1-p$	p	pq	$pe^{it} + q$
Binomiale $B(n,p)$	$p_k = C_n^k p^k q^{n-k}$ $p \in [0,1] \quad q = 1-p$ $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$	np	npq	$\left(pe^{it}+q\right)^n$
Binomiale négative	$p_k = C_{n+k-1}^{n-1} p^n q^k$ $p \in [0,1] \quad q = 1-p$ $k \in \mathbb{N}$	$n\dfrac{q}{p}$	$n\dfrac{q}{p^2}$	$\left(\dfrac{p}{1-qe^{it}}\right)^n$
Multinomiale	$p_{1,\ldots,m} = \frac{n!}{k_1!\ldots k_m!} p_1^{k_1} \ldots p_m^{k_m}$ $p_j \in [0,1] \quad q_j = 1-p_j$ $k_j \in \{0, 1, \ldots, n\}$ $\sum_{j=1}^m k_j = n \quad \sum_{j=1}^m p_j = 1$	np_j	Variance : $np_j q_j$ Covariance : $-np_j p_k$	$\left(\sum_{j=1}^m p_j e^{it}\right)^n$
Poisson $P(\lambda)$	$p_k = e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^k}{k!}$ $\lambda > 0 \quad k \in \mathbb{N}$	λ	λ	$\exp\left[\lambda\left(e^{it}-1\right)\right]$
Géométrique	$p_k = pq^{k-1}$ $p \in [0,1] \quad q = 1-p$ $k \in \mathbb{N}^*$	$\dfrac{1}{p}$	$\dfrac{q}{p^2}$	$\dfrac{pe^{it}}{1-qe^{it}}$

LOIS DE PROBABILITÉ CONTINUES

$\mathbf{m}$: moyenne σ^2 : variance **F. C. :** fonction caractéristique

LOI	**Densité de probabilité**	$\mathbf{m}$	σ^2	**F. C.**
Uniforme	$f(x) = \frac{1}{b-a}$ $x \in]a, b[$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$	$\dfrac{e^{itb} - e^{ita}}{it(b-a)}$
Gamma $\Gamma(\theta, \nu)$	$f(x) = \frac{\theta^\nu}{\Gamma(\nu)} e^{-\theta x} x^{\nu-1}$ $\theta > 0,\ \nu > 0$ $x \geq 0$ avec $\Gamma(n+1) = n!\ \forall n \in \mathbb{N}$	$\dfrac{\nu}{\theta}$	$\dfrac{\nu}{\theta^2}$	$\dfrac{1}{\left(1 - i\frac{t}{\theta}\right)^\nu}$
Inverse gamma IG(θ, ν)	$f(x) = \frac{\theta^\nu}{\Gamma(\nu)} e^{-\frac{\theta}{x}} \frac{1}{x^{\nu+1}}$ $\theta > 0,\ \nu > 0$ $x \geq 0$ avec $\Gamma(n+1) = n!\ \forall n \in \mathbb{N}$	$\frac{\theta}{\nu-1}$ si $\nu > 1$	$\frac{\theta^2}{(\nu-1)^2(\nu-2)}$ si $\nu > 2$	(*)
Première loi de Laplace	$f(x) = \frac{1}{2} e^{-\|x\|}$	0	2	$\dfrac{1}{1+t^2}$
Normale $\mathcal{N}\left(m, \sigma^2\right)$	$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$	m	σ^2	$e^{imt - \frac{\sigma^2 t^2}{2}}$
Khi$_2$ χ^2_ν $\Gamma\left(\frac{1}{2}, \frac{\nu}{2}\right)$	$f(x) = k e^{-\frac{x}{2}} x^{\frac{\nu}{2}-1}$ $k = \dfrac{1}{2^{\frac{\nu}{2}} \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)}$ $\nu \in \mathbb{N}^*,\ x \geq 0$	ν	2ν	$\dfrac{1}{(1-2it)^{\frac{\nu}{2}}}$
Cauchy $c_{\lambda,\alpha}$	$f(x) = \dfrac{1}{\pi\lambda\left(1 + \left(\frac{x-\alpha}{\lambda}\right)^2\right)}$ $\lambda > 0,\ \alpha \in \mathbb{R}$	(-)	(-)	$e^{i\alpha t - \lambda\|t\|}$
Beta $B(a, b)$	$f(x) = k x^{a-1} (1-x)^{b-1}$ $k = \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}$ $a > 0,\ b > 0$ $x \in]0, 1[$ avec $\Gamma(n+1) = n!\ \forall n \in \mathbb{N}$	$\frac{a}{a+b}$	$\frac{ab}{(a+b)^2(a+b+1)}$	(*)