TD 2 Probabilités - Variables aléatoires réelles - 2GE

Exercice 1

Soit X une variable aléatoire continue de densité de probabilité :

$$\begin{array}{ll} f(x) = kx^a & x \in [0,1] \\ f(x) = 0 & \text{sinon} \end{array}$$

où a est un paramètre réel strictement positif fixé.

1) Calculer la valeur de k.

2) Calculer $E(X^n)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ et en déduire $E(X)$ et $Var(X)$.

3) Déterminer la fonction de répartition de X.

On considère une nouvelle variable aléatoire $Y = -\ln X$ pour $X \neq 0$.

4) Déterminer la densité de probabilité de Y.

5) Reprendre la question 2) pour Y.

On considère enfin la variable aléatoire $Z = \left|X - \frac{1}{2}\right|$.

6) Déterminer la loi de Z.

Exercice 2 : Files d'attente

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes de lois exponentielles de paramètres respectifs $\lambda > 0$ et $\mu > 0$ (c'est-à-dire $f(x) = \lambda \exp(-\lambda x) 1_{\mathbb{R}^+}(x)$ et $f(y) = \mu \exp(-\mu y) 1_{\mathbb{R}^+}(y)$ où $1_{\mathbb{R}^+}(x)$ est la fonction indicatrice définie sur $\mathbb{R}^+$). Déterminer la fonction de répartition de $T = \inf(X, Y)$ et en déduire la loi de T.

Application

Trois clients A, B et C se présentent à deux guichets libres. A et B entrent en service et C attend que l'un des deux guichets se libère puis entre en service. On suppose que les temps de service de A, B et C sont des variables aléatoires indépendantes de lois exponentielles de paramètres λ_A, λ_B et λ_C.

1) Quelle est la loi du temps d'attente de C ?

2) Quel est le temps moyen d'attente de C ?

3) Quel est le temps moyen passé par C dans le système (attente + service) ?

Exercice 3 : Combinaison linéaire de deux mesures

On dispose de deux capteurs qui fournissent des mesures notées X_1 et X_2 qui sont des variables aléatoires normales indépendantes de même moyenne μ et de variances σ_1^2 et σ_2^2. Afin d'obtenir une estimation de μ en exploitant ces deux mesures, on considère deux variables aléatoires $Y = \frac{1}{2}(X_1 + X_2)$ et $Z_\omega = \omega X_1 + (1-\omega) X_2$.

1) Montrer que les variables aléatoires Y et Z_ω sont de même moyenne μ et déterminer leurs variances. Déterminer la valeur de ω (notée ω^*) qui minimise la variance de Z_ω. A quelle condition la variable Z_{ω^*} doit être préférée à Y pour l'estimation de μ ?

2) On cherche un intervalle encadrant la valeur μ avec une probabilité minimale de 0.99 (appelé intervalle de confiance). Déterminer la valeur de a telle que

$$P(-a < Z_{\omega^*} - \mu < a) > 0.99.$$

En déduire l'intervalle recherché.