Exercice 1

On considère une urne constituée de $N > 1$ boules numérotées de 1 à N. On tire deux boules sans remise dans cette urne. On note X_1 le numéro de la première boule et X_2 le numéro de la seconde boule.
1) Déterminer les lois de X_1, X_2 et du couple (X_1, X_2) (on prendra soin de préciser les domaines de ces variables et vecteur aléatoires).
2) Déterminer la covariance entre X_1 et X_2. On rappelle que :

$$\sum_{j=1}^{n} j = \frac{n(n+1)}{2} \text{ et } \sum_{j=1}^{n} j^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

3) Déterminer la loi du couple (Z, U) avec $Z = X_1 - X_2$ et $U = X_1$ (on prendra soin de représenter graphiquement l'ensemble des valeurs possibles du couple (Z, U)). En déduire la loi de Z.

Exercice 2

On suppose que le nombre X de voitures se présentant au péage d'une autoroute pendant une heure est une variable aléatoire réelle suivant une loi de Poisson de paramètre λ. On note p la probabilité qu'une de ces voitures soit conduite par une femme. Soit Y la variable aléatoire égale au nombre de voitures conduites par des femmes se présentant au péage pendant une heure.
1) Etablir la loi conditionnelle de la variable aléatoire représentant le nombre de voitures passant au péage en une heure et conduites par des femmes sachant que n voitures sont passées dans cette heure.
2) Déterminer la probabilité pour que n voitures passent au péage en une heure et que k d'entre elles soient conduites par des femmes.
3) Quelle est la loi de probabilité de la variable aléatoire Y ?
4) Que représente la variable aléatoire $X - Y$? En déduire sans calcul sa loi de probabilité.
5) Montrer que les variables Y et $X - Y$ sont indépendantes.

CORRECTION EXERCICE 1

Exercice 1

1) X_1 et X_2 suivent des lois uniformes sur $\{1,...,N\}$ tandis que le couple (X_1,X_2) suit une loi uniforme sur $\{(i,j),i\in\{1,...,N\},j\in\{1,...,N\},i\neq j\}$, c'est-à-dire

$$P[X_1=i,X_2=j]=\frac{1}{N(N-1)}\qquad i\in\{1,...,N\},j\in\{1,...,N\},i\neq j$$

2) Il est clair que $E[X_1]=E[X_2]=\frac{N+1}{2}$. De plus

$$\begin{aligned}E[X_1X_2] &= \sum_{i\neq j} ij\frac{1}{N(N-1)}\\ &= \frac{1}{N(N-1)}\sum_{i\neq j} ij\\ &= \frac{1}{N(N-1)}\left[\sum_{i,j} ij-\sum_{i} i^2\right]\end{aligned}$$

Des calculs simples permettent d'obtenir

$$E[X_1X_2]=\frac{(N+1)(3N+2)}{12}$$

et par suite

$$\mathrm{cov}(X_1,X_2)=-\frac{N+1}{12}$$

3) Le changement de variables est tel que

$$\begin{cases}Z=X_1-X_2\\ U=X_1\end{cases}\iff\begin{cases}X_1=U\\ X_2=U-Z\end{cases}$$

donc il est bijectif de

$$\{(i,j),i\in\{1,...,N\},j\in\{1,...,N\},i\neq j\}$$

dans

$$\{(u,z),u\in\{1,...,N\},z\in\{u-N,...,u-1\},z\neq 0\}$$

Le couple (Z,U) suit une loi uniforme sur son ensemble de définition.
Z est à valeurs dans $\{-(N-1),...,-2,-1\}\cup\{1,2,...,N-1\}$ et
On a

$$P[Z=z]=\frac{N-|z|}{N(N-1)}\qquad z\in\{-(N-1),...,-2,-1\}\cup\{1,2,...,N-1\}$$