TD 4 Probabilités - Couples de variables aléatoires continues - 2GE

Exercice 1

(X,Y) est un couple de variables aléatoires de densité :

$$\begin{array}{ll} f(x,y) = k\exp\left(-\frac{x^2+y^2}{2}\right) & (x,y)\in\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^+\cup\mathbb{R}^-\times\mathbb{R}^- \\ f(x,y)=0 & \text{sinon} \end{array}$$

1) Calculer k.
2) Déterminer les lois marginales de X et de Y
3) Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?
4) Calculer $\mathrm{Cov}(X,Y)$.
5) Déterminer la loi du couple (Z,U) avec $Z = X+Y$ et $U = X-Y$. En déduire la loi de Z en fonction de $\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{u^2}{2}}du$.

Exercice 2 : Simulation de variables aléatoires normales : Méthode de Box-Müller

Soient U et V deux variables aléatoires indépendantes de mêmes lois uniformes sur $]0,1]$. On définit les variables aléatoires X et Y de la façon suivante :

$$\begin{array}{rcl} X & = & \sqrt{-2\ln U}\cos(2\pi V) \\ Y & = & \sqrt{-2\ln U}\sin(2\pi V) \end{array}$$

Montrer que X et Y sont des variables aléatoires normales centrées réduites indépendantes. Application ?

Exercice 3

Soit $\theta > 0$ et $D = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \quad / \quad 0 < y < x\right\}$. Un couple (X,Y) de variables aléatoires réelles a pour densité :

$$\begin{array}{ll} f(x,y) = \theta^2 e^{-\theta x} & (x,y)\in D \\ f(x,y) = 0 & \text{sinon} \end{array}$$

1) Calculer les lois marginales de X et de Y.
2) Calculer la loi de $Z = Y/X$ et montrer que les variables aléatoires X et Z sont indépendantes.