TD 4 PROBABILITÉS - COUPLES DE VARIABLES ALÉATOIRES CONTINUES - 1SN

Exercice 1 : un vecteur non-gaussien de lois marginales gaussiennes.
Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires de densité :

$$\begin{array}{ll} f(x,y) = k \exp\left(-\frac{x^2+y^2}{2}\right) & (x,y) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \cup \mathbb{R}^- \times \mathbb{R}^- \\ f(x,y) = 0 & \text{sinon} \end{array}$$

1) Calculer k.
2) Déterminer les lois marginales de X et de Y
3) Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?
4) Calculer la covariance du couple (X, Y) notée cov(X, Y).
5) Déterminer les lois de $Z = X + Y$ et de $U = X - Y$ en fonction de $\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} du$
6) Déterminer la loi de $T = Y/X$.

Exercice 2 : Simulation de variables aléatoires normales. Méthode de Box-Müller.
Soient U et V deux variables aléatoires indépendantes de mêmes lois uniformes sur $]0, 1]$. On définit les variables aléatoires X et Y de la façon suivante :

$$\begin{array}{lll} X & = & \sqrt{-2\ln U} \cos(2\pi V) \\ Y & = & \sqrt{-2\ln U} \sin(2\pi V) \end{array}$$

Montrer que X et Y sont des variables aléatoires normales centrées réduites indépendantes. Application ?

Exercice 3 : couple de variables aléatoires continues.
Soit $\theta > 0$ et $D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad / \quad 0 < y < x\right\}$. Un couple (X, Y) de variables aléatoires réelles a pour densité :

$$\begin{array}{ll} f(x,y) = \theta^2 e^{-\theta x} & (x,y) \in D \\ f(x,y) = 0 & \text{sinon} \end{array}$$

1) Calculer les lois marginales de X et de Y.
2) Calculer la loi de $Z = Y/X$ et montrer que les variables aléatoires X et Z sont indépendantes.

Applications aux sciences du numérique

Exercice 4 : Lois de Rayleigh et de Rice

On considère un couple de variables aléatoires (X, Y) où X et Y sont indépendantes et de même loi $\mathcal{N}\left(0, \sigma^2\right)$.

1) Déterminer la loi du couple (R, Θ) puis les lois marginales de R et de Θ lorsque

$$\left\{ \begin{array}{l} X = R\cos\Theta \\ Y = R\sin\Theta \end{array} \right.$$

Que peut on en conclure sur la dépendance des va R et Θ ?

Remarque : on dit que R suit la loi de Rayleigh et on vérifie que sa moyenne et sa variance vérifient $E\left[R\right] = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\sigma$ et $Var\left[R\right] = \left(2 - \frac{\pi}{2}\right)\sigma^2$.

2) Mêmes questions que précédemment lorque X et Y sont deux va indépendantes de lois respectives $\mathcal{N}\left(m, \sigma^2\right)$ et $\mathcal{N}\left(0, \sigma^2\right)$. On exprimera les résultats à l'aide de la fonction de Bessel modifiée d'ordre 0

$$I_0(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{x\cos\varphi} d\varphi$$

et de la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} \tfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}}\, du$$

Remarque : on dit que R suit la loi de Rice et on vérifie que X et Y sont des va indépendantes si et seulement si $m = 0$.

Application : vous verrez plus tard que la modélisation d'un bruit blanc Gaussien centré à bande étroite conduit au signal

$$\begin{array}{rcl} b(t) & = & X(t)\cos\left(2\pi f_0 t\right) - Y(t)\sin\left(2\pi f_0 t\right) \\ & = & R(t)\cos\left(2\pi f_0 t + \Theta\right) \end{array}$$

À chaque instant t, $R(t)$ représente l'amplitude du signal reçu dont il est important de connaître les propriétés statistiques.