TD 5 Probabilités - Vecteurs gaussiens - 1SN

Vecteurs gaussiens

Exercice 1 : Indépendance de la moyenne et de la variance empiriques pour un vecteur gaussien.
Soit $\boldsymbol{V}$ un vecteur aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^3$ dont les composantes sont notées X_1, X_2 et X_3. On suppose que X_1, X_2 et X_3 sont des variables aléatoires indépendantes de loi normale $\mathcal{N}(0,1)$.
1) Quelle est la loi du vecteur $\boldsymbol{V} = (X_1, X_2, X_3)^T$? Quelle est la densité de $\boldsymbol{V}$?
2) Soit P la matrice de changement de base orthonormée telle que :

$$P^T = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{-2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

On note X le vecteur colonne de composantes $(X_i)_{i=1,2,3}$ et Y le vecteur colonne $Y = P^T X$ de composantes $(Y_i)_{i=1,2,3}$.

- Quelle est la loi du triplet (Y_1, Y_2, Y_3) ?
- Déterminer les lois de Y_1, Y_2 et Y_3.

3) On note $\overline{X} = \frac{1}{3}\sum_{i=1}^3 X_i$ et $S^2 = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^3 \left(X_i - \overline{X}\right)^2$.

- Vérifier que $\sum_{i=1}^3 X_i^2 = \sum_{i=1}^3 Y_i^2$ et $Y_2^2 + Y_3^2 = \sum_{i=1}^3 X_i^2 - 3\overline{X}^2$.
- Exprimer $\overline{X}$ et en fonction des variables aléatoires Y_i.
- En déduire que $\overline{X}$ et S^2 sont des variables aléatoires indépendantes.

4) Donner la loi de $\overline{X}$ et de $2S^2$.

Exercice 2 : changement de variables et indépendance pour vecteurs gaussiens
Soient X, Y et Z trois variables aléatoires réelles indépendantes de loi $\mathcal{N}(0,1)$.
1) Déterminer la loi de $U = X + Y + Z$.
2) Montrer que $X - Y$ est une variable aléatoire indépendante de U.

Exercice 3 : comment générer un vecteur gaussien de vecteur moyenne $\boldsymbol{m}$ et de matrice de covariance $\boldsymbol{\Sigma}$ donnés ?
Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes de loi normale de moyenne $\mu = 0$ et de variance $\sigma^2 = 1$. Soit $\boldsymbol{m}$ un vecteur de $\mathbb{R}^2$ et $\boldsymbol{\Sigma}$ une matrice symétrique définie positive de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Déterminer une matrice $\boldsymbol{M}$ et un vecteur $\boldsymbol{n}$ tels que $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{M}\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} + \boldsymbol{n}$ soit un vecteur Gaussien de $\mathbb{R}^2$ de moyenne $\boldsymbol{m}$ et de matrice de covariance $\boldsymbol{\Sigma}$. Ce résultat permet de générer des vecteurs gaussiens à partir de variables aléatoires normales centrées réduites.

Réponses

Exercice 1

1) Puisque les variables aléatoires sont indépendantes, la densité de $(X_1, X_2, X_3)^T$ est

$$p(x_1, x_2, x_3) = \prod_{i=1}^{3} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x_i^2}{2}\right).$$

On en déduit que (X_1, X_2, X_3) est un vecteur Gaussien de moyenne $(0, 0, 0)$ et de matrice de covariance I_3 (matrice identité d'ordre 3).

2) La matrice P est orthogonale car ses colonnes sont orthogonales et de norme 1. Elle est donc inversible et par suite de rang maximal 3. On sait alors que $Y = P^T X$ est un vecteur Gaussien avec

$$\begin{aligned}
m_Y &= E[Y] = E\left[P^T X\right] = P^T E[X] = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
\Sigma_Y &= E\left[(Y - m_Y)^T (Y - m_Y)\right] \\
&= E\left[YY^T\right] = E\left[P^T X X^T P\right] = P^T I_3 P = I_3
\end{aligned}$$

Donc $Y \sim \mathcal{N}_3(0, I_3)$. Chacune des composantes de Y suit donc une loi normale de moyenne nulle et de variance unité (voir cours sur les lois marginales). Donc $Y_i \sim \mathcal{N}(0, 1)$.

3)

- On a

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{3} Y_i^2 &= Y^T Y \\
&= X^T P P^T X = X^T X = \sum_{i=1}^{3} X_i^2
\end{aligned}$$

En multipliant P^T par X, on obtient $Y_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(X_1 + X_2 + X_3) = \sqrt{3}\,\overline{X}$. Donc

$$\begin{aligned}
Y_2^2 + Y_3^2 &= \sum_{i=1}^{3} Y_i^2 - Y_1^2 \\
&= \sum_{i=1}^{3} X_i^2 - 3\overline{X}^2
\end{aligned}$$

- On a

$$\begin{aligned}
\overline{X} &= \frac{1}{\sqrt{3}} Y_1 \\
2S^2 &= \sum_{i=1}^{3} \left(X_i - \overline{X}\right)^2 = \sum_{i=1}^{3} Y_i^2 - 2\frac{Y_1}{\sqrt{3}}\sqrt{3}Y_1 + Y_1^2 \\
&= Y_2^2 + Y_3^2
\end{aligned}$$

Puique Y_1, Y_2 et Y_3 sont indépendantes, on en déduit que $\overline{X} = \frac{1}{\sqrt{3}} Y_1$ et $S^2 = \frac{1}{2}\left(Y_2^2 + Y_3^2\right)$ sont également des variables aléatoires indépendantes.

4)

$$\begin{aligned}\overline{X} &= \frac{1}{\sqrt{3}}Y_1 \sim \mathcal{N}\left(0, \frac{1}{3}\right) \\ 2S^2 = Y_2^2 + Y_3^2 &\sim \chi_2^2 \text{ (loi du chi2 à 2 degrés de liberté)}\end{aligned}$$

Exercice 2

1) U est obtenu par transformation affine de $\boldsymbol{V} = (X, Y, Z)^T$ puisque

$$U = [1\ 1\ 1]\boldsymbol{V}.$$

Comme la matrice $\boldsymbol{A} = [1\ 1\ 1]$ est de rang $p = 1$, d'après le cours, U suit une loi normale de moyenne $E[\boldsymbol{AV}] = \boldsymbol{A}E[\boldsymbol{V}] = 0$ et de variance

$$\sigma_U^2 = \boldsymbol{A}\Sigma_V\boldsymbol{A}^T$$

où $\Sigma_V = I_3$ est la matrice de covariance du vecteur $\boldsymbol{V}$, soit

$$\sigma_U^2 = \boldsymbol{AA}^T = 3.$$

2) On pose $W = X - Y$. Le vecteur $(U, W)^T$est obtenu par transformation affine de $\boldsymbol{V}$ puisque

$$\begin{pmatrix} U \\ W \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}.$$

Puisque la matrice

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

est de rang 2, le vecteur $(U, W)^T$ est un vecteur gaussien. La matrice de covariance de $(U, W)^T$ est

$$\boldsymbol{A}\Sigma_{\boldsymbol{V}}\boldsymbol{A}^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} I_3 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Puisque $(U, W)^T$ est un vecteur gaussien de covariance nulle, on en déduit d'après le cours que U et W sont des variables indépendantes.

Exercice 3

On sait que si $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ est un vecteur de moyenne $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et de matrice de covariance I_2 (matrice identité d'ordre 2 et que $\boldsymbol{M}$ est de rang maximal (ici de rang 2), alors $\boldsymbol{v} = M\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} + \boldsymbol{n}$ est aussi un vecteur Gaussien de $\mathbb{R}^2$ de moyenne $\boldsymbol{M}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \boldsymbol{n}$ et de matrice de covariance $\boldsymbol{M}I_3\boldsymbol{M}^T$. On en déduit

$$\begin{aligned}\boldsymbol{n} &= \boldsymbol{m} \\ \boldsymbol{MM}^T &= \boldsymbol{\Sigma}\end{aligned}$$

Le vecteur $\boldsymbol{n}$ est donc égal à $\boldsymbol{m}$.

La matrice $\boldsymbol{M}$ doit être de rang maximal et vérifier $\boldsymbol{MM}^T = \boldsymbol{\Sigma}$. Il n'y a pas unicité de la matrice $\boldsymbol{M}$ vérifiant cette égalité. Un exemple classique de construction de $\boldsymbol{M}$ consiste à utiliser le fait que puisque $\boldsymbol{\Sigma}$ est symétrique définie positive, elle est diagonalisable avec une matrice de passage unitaire $\boldsymbol{P}$ et des valeurs propres positives, d'où

$$\boldsymbol{MM}^T = \boldsymbol{\Sigma} = \boldsymbol{PDP}^T$$

avec $\boldsymbol{D} =$ diag $(\sigma_1^2, ..., \sigma_n^2)$. On peut alors construire la matrice $\boldsymbol{M}$ de la manière suivante

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{P}\left[\text{diag}(\sigma_1, ..., \sigma_n)\right].$$