



*Partiel sans documents et sans calculatrice (une feuille manuscrite A4 est autorisée)
Les trois exercices sont indépendants*

Exercice 1

Soient X, Y et Z trois variables aléatoires Gaussiennes indépendantes de loi $\mathcal{N}(0, 1)$. On pose $U = X + Y - Z$ et $T = aX + bY$ avec $a \neq 0$ et $b \neq 0$.

1) Déterminer la loi du couple (U, T) et les lois marginales de U et de T . A quelle condition les variables aléatoires U et T sont-elles indépendantes ?

2) Déterminer la densité conditionnelle de $U | T = t$. En déduire que $U | T = t$ suit une loi normale dont on déterminera la moyenne et la variance. A partir de l'expression de la densité de $U | T = t$, retrouver la condition que doivent vérifier a et b pour que U et T soient des variables aléatoires indépendantes.

Exercice 2

On considère une variable aléatoire X de loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$ et un nombre réel $a > 0$. On note $\Phi(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} du$ la fonction de répartition de la variable aléatoire X .

1) Déterminer la loi de la variable aléatoire $Y = \text{sgn}(X - a)$ en fonction de Φ , où $\text{sgn}()$ est la fonction "signe" définie par

$$\text{sgn}(x) = \begin{cases} +1 & \text{si } x > 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

2) Quelle est la loi du couple (Y, Z) lorsque $Z = \text{sgn}(X + a)$?

3) Etude du coefficient de corrélation entre Y et Z .

a) Déterminer le coefficient de corrélation entre Y et Z noté $\rho(a)$.

b) Application numérique : déterminer $\rho(1)$.

c) Représenter l'allure de la courbe $\rho(a)$, $a \in \mathbb{R}^{+*}$ et interpréter ce résultat.

Exercice 3 (issu du livre de Jean-Pierre Delmas intitulé "Introduction aux Probabilités")

On considère un couple de variables aléatoires continues (X, Y) de densité de probabilité

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)} - \lambda(x)\lambda(y) \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

1) Quelles sont les deux conditions que doit vérifier la fonction $\lambda(x)$ pour que $f(x, y)$ soit une densité de probabilité ? Montrer qu'une de ces conditions permet de déterminer $\int_{\mathbb{R}} \lambda(x) dx$. Montrer que l'autre condition est vérifiée si $|\lambda(x)| \leq \beta(x)$, $\forall x$, où $\beta(x)$ est une fonction que l'on précisera.

2) On pose $\lambda(x) = a \cos(x) \mathbb{I}_{[-\pi, +\pi]}(x)$, $a \in \mathbb{R}^+$, avec

$$\begin{aligned} \mathbb{I}_{[-\pi, +\pi]}(x) &= 1 \text{ si } x \in [-\pi, +\pi] \\ \mathbb{I}_{[-\pi, +\pi]}(x) &= 0 \text{ si } x \notin [-\pi, +\pi] \end{aligned}$$

Montrer tout d'abord que la valeur de $\int_{\mathbb{R}} \lambda(x) dx$ est en accord avec la condition du 1). Donner ensuite une condition suffisante portant sur a pour que la fonction $\lambda(x) = a \cos(x) \mathbb{I}_{[-\pi, +\pi]}(x)$ vérifie la condition $|\lambda(x)| \leq \beta(x)$, $\forall x$ (attention, la fonction $\lambda(x)$ prend des valeurs négatives pour $|x| > \frac{\pi}{2}$!).

3) Lorsque les conditions de la question 1) sont vérifiées, quelles sont les lois marginales du couple (X, Y) ?

4) Quelle condition doit vérifier $\lambda(x)$ pour avoir $cov(X, Y) = 0$. Cette condition est-elle vérifiée pour la fonction $\lambda(x) = a \cos(x) \mathbb{I}_{[-\pi, +\pi]}(x)$?

5) Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ? Interpréter ce résultat.

Loi Normale $N(0, 1)$

$$\begin{aligned} \Phi(x) &= \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} du \\ \Phi(-x) &= 1 - \Phi(x) \end{aligned}$$

x	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	0.5279	.5319	.5359
0.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	0.5675	.5714	.5753
0.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	0.6064	.6103	.6141
0.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	0.6443	.6480	.6517
0.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	0.6808	.6844	.6879
0.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	0.7157	.7190	.7224
0.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	0.7486	.7517	.7549
0.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7703	.7734	.7764	0.7794	.7823	.7852
0.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	0.8078	.8106	.8133
0.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	0.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	0.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	0.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	0.8980	.8997	.9015
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	0.9147	.9162	.9177
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	0.9292	.9306	.9319
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	0.9418	.9429	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	0.9525	.9535	.9545
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	0.9616	.9625	.9633
1.8	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	0.9693	.9699	.9706
1.9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	0.9756	.9761	.9767
2.0	.9772	.9778	.9783	.9788	.9793	.9798	.9803	0.9808	.9812	.9817
2.1	.9821	.9826	.9830	.9834	.9838	.9842	.9846	0.9850	.9854	.9857
2.2	.9861	.9864	.9868	.9871	.9875	.9878	.9881	0.9884	.9887	.9890
2.3	.9893	.9896	.9898	.9901	.9904	.9906	.9909	0.9911	.9913	.9916
2.4	.9918	.9920	.9922	.9925	.9927	.9929	.9931	0.9932	.9934	.9936
2.5	.9938	.9940	.9941	.9943	.9945	.9946	.9948	0.9949	.9951	.9952
2.6	.9953	.9955	.9956	.9957	.9959	.9960	.9961	0.9962	.9963	.9964
2.7	.9965	.9966	.9967	.9968	.9969	.9970	.9971	0.9972	.9973	.9974
2.8	.9974	.9975	.9976	.9977	.9977	.9978	.9979	0.9979	.9980	.9981
2.9	.9981	.9982	.9982	.9983	.9984	.9984	.9985	0.9985	.9986	.9986