



Partiel sans documents (une feuille manuscrite A4 est autorisée)

Exercice 1

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes de même loi uniforme sur l'intervalle $[0, 1]$

1) Déterminer la loi du couple (U, V) avec

$$\begin{cases} U = X + Y \\ V = X \end{cases}$$

en prenant soin de représenter le domaine sur lequel la densité de ce couple est non nulle.

2) Déterminer les lois marginales de U et de V . Vérifier que les densités obtenues $f(u, \cdot)$ et $f(\cdot, v)$ sont d'intégrale unité.

3) Déterminer la variance de U , la variance de V et la covariance du couple (U, V) en fonction de la variance de X notée σ_X^2 . En déduire la valeur du coefficient de corrélation du couple (U, V) .

4) Déterminer la fonction de répartition de U et représenter la graphiquement.

Exercice 2

Soient X et Y deux variables aléatoires binaires indépendantes de même loi uniforme sur l'ensemble à deux éléments $\{0, 1\}$

1) Déterminer la loi du couple (U, V) avec

$$\begin{cases} U = X + Y \\ V = X \end{cases}$$

2) Déterminer les lois marginales de U et de V .

3) Déterminer le coefficient de corrélation du couple (U, V) .

4) Déterminer la fonction de répartition de U et représenter la graphiquement.

Exercice 3

On considère un vecteur Gaussien $X = {}^t(X_1, X_2, X_3)$ de moyenne $m = (0, 0, 0)$ et de matrice de covariance définie comme suit

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

1) On pose $U = X_1$ et $V = X_2 - aX_1$, où $a \in \mathbb{R}$. Quelle est la loi du couple (U, V) ? Pour quelle valeur de a les variables U et V sont-elles indépendantes (justifier avec soin votre réponse).

2) Déterminer les densités de X_1 et du couple de (X_1, X_2) . En déduire que la loi de X_2 sachant $X_1 = x_1$ est une loi normale dont on précisera la moyenne et la variance.

LOIS DE PROBABILITÉ DISCRÈTES

m : moyenne σ^2 : variance **F. C.** : fonction caractéristique
 $p_k = P[X = k]$ $p_{1,\dots,m} = P[X_1 = k_1, \dots, X_m = k_m]$

LOI	Probabilités	m	σ^2	F. C.
Uniforme	$p_k = \frac{1}{n}$ $k \in \{1, \dots, n\}$	$\frac{n+1}{2}$	$\frac{n^2-1}{12}$	$\frac{e^{it}(1 - e^{itn})}{n(1 - e^{it})}$
Bernoulli	$p_1 = P[X = 1] = p$ $p_0 = P[X = 0] = q$ $p \in [0, 1]$ $q = 1 - p$	p	pq	pe^{it}

LOIS DE PROBABILITÉ CONTINUES

m : moyenne σ^2 : variance
F. C. : fonction caractéristique

LOI	Densité de probabilité	m	σ^2	F. C.
Uniforme	$f(x) = \frac{1}{b-a}$ $x \in]a, b[$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$	$\frac{e^{itb} - e^{ita}}{it(b-a)}$
Normale $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$	$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$	m	σ^2	$e^{imt - \frac{\sigma^2 t^2}{2}}$

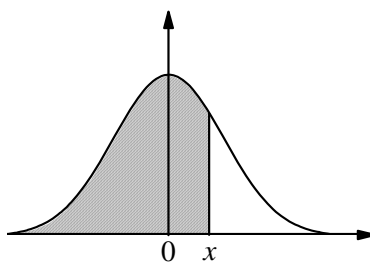
CALCUL MATRICIEL

Si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, on a $\det(A) = ad - bc$ et $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

Loi Normale $N(0, 1)$

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} du$$

$$\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$$



x	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	0.5279	.5319	.5359
0.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	0.5675	.5714	.5753
0.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	0.6064	.6103	.6141
0.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	0.6443	.6480	.6517
0.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	0.6808	.6844	.6879
0.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	0.7157	.7190	.7224
0.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	0.7486	.7517	.7549
0.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7703	.7734	.7764	0.7794	.7823	.7852
0.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	0.8078	.8106	.8133
0.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	0.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	0.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	0.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	0.8980	.8997	.9015
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	0.9147	.9162	.9177
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	0.9292	.9306	.9319
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	0.9418	.9429	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	0.9525	.9535	.9545
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	0.9616	.9625	.9633
1.8	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	0.9693	.9699	.9706
1.9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	0.9756	.9761	.9767
2.0	.9772	.9778	.9783	.9788	.9793	.9798	.9803	0.9808	.9812	.9817
2.1	.9821	.9826	.9830	.9834	.9838	.9842	.9846	0.9850	.9854	.9857
2.2	.9861	.9864	.9868	.9871	.9875	.9878	.9881	0.9884	.9887	.9890
2.3	.9893	.9896	.9898	.9901	.9904	.9906	.9909	0.9911	.9913	.9916
2.4	.9918	.9920	.9922	.9925	.9927	.9929	.9931	0.9932	.9934	.9936
2.5	.9938	.9940	.9941	.9943	.9945	.9946	.9948	0.9949	.9951	.9952
2.6	.9953	.9955	.9956	.9957	.9959	.9960	.9961	0.9962	.9963	.9964
2.7	.9965	.9966	.9967	.9968	.9969	.9970	.9971	0.9972	.9973	.9974
2.8	.9974	.9975	.9976	.9977	.9977	.9978	.9979	0.9979	.9980	.9981
2.9	.9981	.9982	.9982	.9983	.9984	.9984	.9985	0.9985	.9986	.9986