

Probabilités

Jean-Yves Tourneret⁽¹⁾

(1) Université de Toulouse, ENSEEIHT-IRIT-TéSA

Thème 1 : Analyse et Synthèse de l'Information

jyt@n7.fr

Plan du cours

- **Chapitre 1** : Éléments de base du calcul des probabilités
 - Triplet de Probabilité (Ω, C, P)
 - Équiprobabilité - Dénombrement
 - Probabilités conditionnelles
 - Indépendance
- **Chapitre 2** : Variables aléatoires réelles
- **Chapitre 3** : Couples de variables aléatoires réelles
- **Chapitre 4** : Vecteurs Gaussiens
- **Chapitre 5** : Convergence et théorèmes limites

Bibliographie

- B. Lacaze, M. Maubourguet, C. Mailhes et J.-Y. Tourneret, Probabilités et Statistique appliquées, Cépadués, 1997.
- Athanasios Papoulis and S. Unnikrishna Pillai, Probability, Random Variable and Stochastic Processes, McGraw Hill Higher Education, 4th edition, 2002.

Triplet de Probabilité (Ω, \mathcal{C}, P)

- Ω : Ensemble des résultats d'expérience
- \mathcal{C} : Ensemble des événements
 - $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(\Omega)$
 - $\Omega \in \mathcal{C}$ (événement certain)
 - si $A \in \mathcal{C}$ alors $\bar{A} \in \mathcal{C}$ (événement contraire)
 - si $A_i \in \mathcal{C}, i \in I$ (I fini ou infini dénombrable), alors $\cup A_i \in \mathcal{C}$
- P : application **probabilité** de \mathcal{C} dans $[0, 1]$
 - $P(\Omega) = 1$
 - $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$
 - $P(\cup A_i) = \sum_{i \in I} P(A_i)$ si les événements A_i sont disjoints.

Propriétés

● Événements

- $\emptyset \in \mathcal{C}$

- si $A_i \in \mathcal{C}, i \in I$ (I fini ou infini dénombrable), alors
 $\cap A_i \in \mathcal{C}$

● Probabilité

- $P(\emptyset) = 0$

- si $A \subset B$, alors, $P(A) \leq P(B)$

- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Vocabulaire

- si $a \in \Omega$ alors $\{a\}$ est un **événement élémentaire**
- si $\Omega = \cup_{i \in I} A_i$ avec $A_i \cap A_j = \emptyset$, on dit que $\{A_i\}_{i \in I}$ est un **système complet d'événements**
- (Ω, \mathcal{C}) **espace probabilisable**
- (Ω, \mathcal{C}, P) **espace probabilisé**
- \mathcal{C} **tribu** ou **σ -algèbre**

Équiprobabilité - Dénombrement

● Définition

$$P(A) = \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{\text{Nombre de cas favorables}}{\text{Nombre de cas possibles}}$$

● Exemples

- Jet d'un dé
- Tirages avec remise dans une urne à 2 catégories

$$P(k \text{ succès sur } n \text{ expériences}) = C_n^k P_s^k (1 - P_s)^{n-k}$$

où $k = 0, \dots, n$, $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$, P_s est la probabilité du succès sur une expérience et n est le nombre d'expériences identiques et indépendantes.

Probabilités conditionnelles

- Définition

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \text{ ou } P(A \cap B) = P(A|B)P(B)$$

- Théorème des probabilités totales

$$P(B) = \sum_{i \in I} P(B|A_i)P(A_i)$$

pour tout système complet d'événements $\{A_i\}$.

- Formule de Bayes

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)}$$

Indépendance

• Deux événements

Deux événements A et B sont **indépendants** si et ssi

$$P(A \cap B) = P(A)P(B) \text{ ou } P(A|B) = P(A)$$

• Généralisation

On dit que $\{A_i\}_{i \in I}$ est famille d'événements **mutuellement indépendants** si et ssi

$$P\left(\bigcap_{i \in J} A_i\right) = \prod_{i \in J} P(A_i), \quad \forall J \subset I$$

👉 Exercice d'application

Que faut-il savoir ?

- Probabilité d'une **réunion** d'événements : $P(A \cup B) = ?$
- Probabilité de l'**évènement contraire** : $P(\bar{A}) = ?$
- **Equiprobabilité** : $P(A) = ?$
- Loi **Binomiale** : $P(k \text{ succès sur } n \text{ expériences}) = ?$
- Probabilité **conditionnelle** : $P(A|B) = ?$
- **Indépendance** : $P(A \cap B) = ?$
- Formule de **Bayes** : $P(A|B) = ?$

Plan du cours

- **Chapitre 1** : Éléments de base du calcul des probabilités

- **Chapitre 2** : Variables aléatoires réelles

- Définition

- Loi d'une variable aléatoire

- Fonction de répartition

- Exemples fondamentaux

- Espérance mathématique

- Changements de variables

- **Chapitre 3** : Couples de variables aléatoires réelles

- ...

Variable aléatoire réelle

• Définition

Soient (Ω, \mathcal{C}, P) un triplet de probabilité qui est associé à l'expérience et (Ω', \mathcal{C}') , avec $\Omega' \subset \mathbb{R}$ un espace probabilisable qui résume les quantités qui nous intéressent. Une variable aléatoire réelle X est une application de Ω dans Ω' qui possède la propriété de mesurabilité :

$$\forall (a, b) \in \mathcal{C}', \{\omega | X(\omega) \in (a, b)\} \in \mathcal{C}.$$

• Exemple : somme des résultats de deux dés

$$X : \begin{array}{l} \Omega \longrightarrow \Omega' \\ (m, n) \longmapsto m + n \end{array}$$

Variable aléatoire discrète

- **Loi d'une variable aléatoire discrète**

$\{X(\omega), \omega \in \Omega\}$ est fini ou infini dénombrable. La loi de X est définie par

- l'ensemble des valeurs possibles de X : $\{x_i, i \in I\}$

- les probabilités associées $p_i = P[X = x_i]$ avec

$$\sum_{i \in I} p_i = 1 \text{ et } P[X \in \Delta] = \sum_{x_i \in \Delta} p_i$$

- **Exemples**

- Jet d'un dé

- Jet d'une pièce

- ...

Variables aléatoires continues

- **Loi d'une variable aléatoire continue**

$\{X(\omega), \omega \in \Omega\}$ est infini non dénombrable avec $P[X = x_i] = 0, \forall x_i$. La loi de X est définie par

- l'ensemble des valeurs possibles de X qui est en général une réunion d'intervalles

- une densité de probabilité $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que
 $x \mapsto p(x)$

$$p(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R},$$

$$\int_{\mathbb{R}} p(u) du = 1,$$

$$P[X \in \Delta] = \int_{\Delta} p(u) du.$$

Variables aléatoires continues

• Remarques

- On peut avoir $p(x) > 1$.

- $$p(x) = \lim_{dx \rightarrow 0} \frac{P[X \in [x, x+dx]]}{dx}$$

- $P[X \in [x, x + dx]] \simeq p(x)dx$ pour dx “petit”

- lien avec l’histogramme

• Exemples

- Loi uniforme sur $[a, b]$

- Loi normale

Variable aléatoire mixte

- **Loi d'une variable aléatoire mixte**

$\{X(\omega), \omega \in \Omega\} = E \cup \{x_i, \in I\}$ est la réunion de deux ensembles, le premier E est infini non dénombrable avec $P[X = x] = 0, \forall x \in E$, le deuxième est fini ou infini dénombrable avec $p_i = P[X = x_i] > 0$. La loi de X est définie par

- $\{x_i, \in I\}$ avec $p_i = P[X = x_i] > 0$

- E et une **densité de probabilité** p telle que

$$p(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\int_{\mathbb{R}} p(u) du + \sum_{i \in I} p_i = 1$$

$$P[X \in \Delta] = \int_{\Delta} p(u) du + \sum_{x_i \in \Delta} p_i$$

- **Exemple** : Tension aux bornes d'un voltmètre

Exemples Fondamentaux de Lois Discrètes

- **Loi de Bernoulli** : $X \sim \mathcal{B}e(p)$

$$P[X = 0] = p \text{ et } P[X = 1] = q = 1 - p$$

Lancer d'une pièce, "Succès ou Echec", ...

- **Loi Binomiale** : $X \sim \mathcal{B}(n, p)$

$$P[X = k] = \mathcal{C}_n^k p^k q^{n-k}, \quad k = 0, \dots, n$$

Probabilité d'avoir k succès sur n expériences, $X = \sum_{i=1}^n X_i$
où X_i suit une loi de Bernoulli, ...

- **Loi de Poisson** : $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$

$$P[X = k] = \frac{\lambda^k}{k!} \exp(-\lambda), \quad k \in \mathbb{N}$$

Loi du nombre d'arrivées pendant un temps donné

Exemples Fondamentaux de Loix Continues

- **Loi Uniforme** : $X \sim \mathcal{U}([a, b])$

$$p(x) = \frac{1}{b - a}, \quad x \in [a, b]$$

- **Loi Normale ou Gaussienne** : $X \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left[-\frac{(x - m)^2}{2\sigma^2}\right], \quad x \in \mathbb{R}$$

- **Loi Gamma** : $X \sim \mathcal{Ga}(\alpha, \beta)$

$$p(x) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} \exp(-\beta x), \quad x > 0$$

Pour $\alpha = 1$, on a la **loi exponentielle**

Fonction de répartition

● Définition

$$F : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$$
$$x \longmapsto F(x) = P[X < x]$$

● Propriétés

● F croissante

● $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$

● F caractérise une loi de probabilité

● Si X est une va discrète, le graphe de F est une fonction en escaliers

● Si X est une va continue, F est continue et $F(x) = \int_{-\infty}^x p(u) du$, i.e., $p(x) = F'(x)$

Espérance mathématique

• Définition

$$E[\alpha(X)] = \begin{cases} X \text{ va discrète : } & \sum_{i \in I} \alpha(x_i) p_i \\ X \text{ va continue : } & \int_{\mathbb{R}} \alpha(u) p(u) du \\ X \text{ va mixte : } & \sum_{i \in I} \alpha(x_i) p_i + \int_{\mathbb{R}} \alpha(u) p(u) du \end{cases}$$

• Propriétés

- Constante : $E(\text{cste}) = \text{cste}$
- Linéarité : $E(aX + b) = aE(X) + b$

• Exemples

- Moments non centrés : $E(X^n)$ ($n = 1$: moyenne)
- Moments centrés : $E([X - E(X)]^n)$ ($n = 2$: variance)
- Fonction caractéristique : $\phi_X(t) = E[\exp(itX)]$

Exemples simples

• Variables aléatoires discrètes

$$E[X] = \sum_{i \in I} x_i P[X = x_i], \quad E[X^2] = \sum_{i \in I} x_i^2 P[X = x_i]$$

$$E[e^{jtX}] = \sum_{i \in I} e^{jtx_i} P[X = x_i]$$

• Variables aléatoires continues

$$E[X] = \int_{\mathbb{R}} up(u)du, \quad E[X^2] = \int_{\mathbb{R}} u^2 p(u)du$$

$$E[e^{jtX}] = \int_{\mathbb{R}} e^{jtu} p(u)du$$

Propriétés

• Variance

- $\text{var}(X) = E\left([X - E(X)]^2\right) = E(X^2) - E(X)^2$

- Ecart Type : $\sqrt{\text{variance}}$

- $\text{var}(aX + b) = a^2\text{var}(X)$

• Fonction caractéristique

- Caractérise une loi de probabilité

- Cas continu

$$\phi_X(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{itu} p(u) du$$

est la transformée de Fourier de p .

• Exemples de calculs

Changements de variables

- **Problème**

Étant donnée une variable aléatoire réelle X de loi connue, on cherche à déterminer la loi de $Y = g(X)$ où g est une fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{R} .

- **Variables aléatoires discrètes**

- **Définition**

$$P[Y = y_j] = \sum_{i|y_j=g(x_i)} p[X = x_i]$$

- **Exemple**

$$Y = (X - 2)^2 \text{ avec } X \sim \mathcal{P}(\lambda)$$

Changements de va continues

- g bijective

- **Théorème** : si X est une va continue à valeurs dans un ouvert $O_X \subset \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ application **bijective** de O_X dans un ouvert $O_Y \subset \mathbb{R}$ différentiable ainsi que son inverse g^{-1} , alors $Y = g(X)$ est une va continue de densité

$$p_Y(y) = p_X [g^{-1}(y)] \left| \frac{dx}{dy} \right|.$$

où $\frac{dx}{dy}$ est le Jacobien de la transformation.

- **Idée de preuve**

- **Exemple** : $Y = aX + b$ avec $X \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$.

Changements de va continues

- **g bijective par morceaux**

On suppose que g est différentiable sur chaque morceau ainsi que son inverse.

- **Méthode** : On ajoute la contribution de chaque bijection.

- **Exemple** : $Y = X^2$ avec $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$.

Que faut-il savoir ?

- Loi d'une variable aléatoire **discrète** : ?
- Loi d'une variable aléatoire **continue** : ?
- **Appartenance à un intervalle** : $P[X \in \Delta] = ?$
- **Signification d'une densité** : $P[X \in [x, x + dx]] \simeq ?$
- **Fonction de répartition** : $F(x) = ?$
- **Espérance mathématique** : $E[X] = ?$, $E[X^2] = ?$
- **Variance** : $\text{Var}[X] = ?$, **Ecart-type** : ?
- **Relations utiles** : $E[aX + b] = ?$, $\text{Var}[aX + b] = ?$
- **Fonction caractéristique** : $\phi(t) = ?$
- **Changement de variables** : ?

Plan du cours

- Chapitre 1 : Éléments de base du calcul des probabilités
- Chapitre 2 : Variables aléatoires réelles
- Chapitre 3 : Couples de variables aléatoires réelles
 - Définition
 - Fonction de répartition
 - Lois marginales, lois conditionnelles, indépendance
 - Espérances mathématiques
 - Changements de variables
- Chapitre 4 : Vecteurs Gaussiens
- Chapitre 5 : Convergence et théorèmes limites

Couple de va réelles

- **Définition**

Soit (Ω, C, P) un espace **probabilisé** et (Ω', C') un espace **probabilisable** avec $\Omega' \subset \mathbb{R}^2$ et C' construit à partir des réunions et intersections finies ou dénombrables des pavés $(a, b) \times (c, d)$ de \mathbb{R}^2 . Un couple (X, Y) de variables aléatoires réelles est une **application mesurable de Ω dans Ω'** .

- **notation**

On notera $P[(X, Y) \in \Delta]$, $\Delta \subset \mathbb{R}^2$, la probabilité que le couple (X, Y) prenne ses valeurs dans Δ .

Loi d'un couple de va

- **Variables aléatoires discrètes**

La loi du couple (X, Y) est définie par l'ensemble des valeurs possibles du couple (qui est un ensemble fini ou dénombrable) noté $\{(x_i, y_j), i \in I, j \in J\}$ et par les probabilités associées $p_{ij} = P[X = x_i, Y = y_j]$, $i \in I, j \in J$ telles que $p_{ij} \geq 0$ et $\sum_{i,j} p_{ij} = 1$.

- **Variables aléatoires continues**

La loi du couple (X, Y) est définie par l'ensemble des valeurs possibles du couple (qui est un ensemble infini non dénombrable), en général une réunion d'intervalles de \mathbb{R}^2 , et par une densité de probabilité $p(x, y)$ telle que

$$p(x, y) \geq 0, \text{ et } \int \int_{\mathbb{R}^2} p(x, y) dx dy = 1.$$

Propriétés

- **Couples de va discrètes**

$$P[(X, Y) \in \Delta] = \sum_{(i,j)|(x_i,y_j) \in \Delta} P[X = x_i, Y = y_j].$$

- **Couples de va continues**

$$P[(X, Y) \in \Delta] = \int \int_{\Delta} p(u, v) du dv$$

Remarque : signification de $p(u, v)$

Fonction de répartition

● Définition

$$F : \mathbb{R}^2 \rightarrow [0, 1]$$
$$(x, y) \mapsto F(x, y) = P[X < x, Y < y]$$

● Propriétés

- C'est une fonction **étagée** lorsque (X, Y) est un couple de va **discrètes**
- C'est une fonction **continue** lorsque (X, Y) est un couple de va **continues** avec

$$F(x, y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y p(u, v) du dv \text{ d'où } p(x, y) = \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y}$$

Lois marginales

• Cas discret

$$P[X = x_i] = p_{i.} = \sum_{j \in J} p_{ij}$$

$$P[Y = y_j] = p_{.j} = \sum_{i \in I} p_{ij}$$

• Cas continu

$$\text{densité de } X \quad : \quad p(x, \cdot) = \int_{\mathbb{R}} p(x, y) dy$$

$$\text{densité de } Y \quad : \quad p(\cdot, y) = \int_{\mathbb{R}} p(x, y) dx$$

Lois conditionnelles

Les lois conditionnelles d'un couple (X, Y) sont les lois de $X|Y = y$ et de $Y|X = x$.

• Cas discret

$$P[X = x_i | Y = y_j] = \frac{p_{ij}}{p_{.j}}$$

$$P[Y = y_j | X = x_i] = \frac{p_{ij}}{p_{i.}}$$

• Cas continu

$$\text{densité de } X|Y \quad p(x|y) = \frac{p(x, y)}{p(., y)}$$

$$\text{densité de } Y|X \quad p(y|x) = \frac{p(x, y)}{p(x, .)}$$

Indépendance

Les variables aléatoires X et Y sont **indépendantes** si

$$P [X \in \Delta, Y \in \Delta'] = P [X \in \Delta] P [Y \in \Delta'] , \forall \Delta, \forall \Delta'$$

• Cas discret

$$p_{ij} = p_i.p_j \quad \forall i \in I, \forall j \in J$$

• Cas continu

$$p(x, y) = p(x, .)p(., y) \quad \forall x, \forall y$$

ou

$$p(x|y) = p(x, .), \quad \forall x, \forall y$$

Propriété

si X et Y sont des variables aléatoires **indépendantes** et α et β sont des applications **continues** de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , alors $\alpha(X)$ et $\beta(Y)$ sont des variables aléatoires **indépendantes**. La réciproque est vraie si α et β sont des applications **bijectives**. Par contre, dans le cas où α et β ne sont pas bijectives, la réciproque est fausse. On vérifiera par exemple que le couple (X, Y) de densité

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{4} (1 + xy) & \text{si } |x| < 1 \text{ et } |y| < 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

est tel que X^2 et Y^2 sont indépendantes alors que X et Y ne le sont pas.

Espérance mathématique

● Définition

$$E[\alpha(X, Y)] = \begin{cases} X \text{ et } Y \text{ va discrètes :} & \sum_{i,j \in I \times J} \alpha(x_i, y_j) p_{ij} \\ X \text{ et } Y \text{ va continues :} & \int_{\mathbb{R}^2} \alpha(u, v) p(u, v) dudv \end{cases}$$

● Propriétés

● **Constante** : $E(\text{cste}) = \text{cste}$

● **Linéarité** :

$$E[a\alpha(X, Y) + b\beta(X, Y)] = aE[\alpha(X, Y)] + bE[\beta(X, Y)]$$

● Définition **cohérente** (cas continu) :

$$E[\alpha(X)] = \int_{\mathbb{R}^2} \alpha(u) p(u, v) dudv = \int_{\mathbb{R}} \alpha(u) p(u, \cdot) du$$

● **Indépendance** : si X et Y sont indépendantes, alors

$$E[\alpha(X)\beta(Y)] = E[\alpha(X)] E[\beta(Y)], \quad \forall \alpha \forall \beta$$

Exemples

• Moments centrés et non centrés

$$m_{ij} = E(X^i Y^j), \quad i \in \mathbb{N}, j \in \mathbb{N}$$

$$\mu_{ij} = E([X - E(X)]^i [Y - E(Y)]^j), \quad i \in \mathbb{N}, j \in \mathbb{N}$$

• Covariance et matrice de covariance

$$\text{cov}(X, Y) = E([X - E(X)][Y - E(Y)]) = E(XY) - E(X)E(Y)$$

$$E[\mathbf{V}\mathbf{V}^T] = \begin{pmatrix} \text{var}X & \text{cov}(X, Y) \\ \text{cov}(X, Y) & \text{var}Y \end{pmatrix}, \quad \mathbf{V} = \begin{pmatrix} X - E[X] \\ Y - E[Y] \end{pmatrix}$$

• Fonction caractéristique

$$\phi_{X,Y}(u_1, u_2) = E[\exp(i\mathbf{u}^T \mathbf{W})], \quad \mathbf{u} = (u_1, u_2)^T, \quad \mathbf{W} = (X, Y)^T.$$

Coefficient de Corrélation

● Définition

$$r(X, Y) = \frac{\text{cov}(X, Y)}{\sigma_X \sigma_Y},$$

où σ_X et σ_Y sont les écart-types des va X et Y .

● Propriétés

- $-1 \leq r(X, Y) \leq 1$

- $r(X, Y) = \pm 1$ si et ssi X et Y sont reliées par une relation **affine**

- si X et Y sont des va **indépendantes**, alors $r(X, Y) = 0$ mais la réciproque est fausse

● Conclusion

$r(X, Y)$ est une mesure imparfaite mais très pratique du **lien** entre les va X et Y .

Espérance conditionnelle

• Théorème

$$E[\alpha(X, Y)] = E_X[E_Y[\alpha(X, Y)|X]]$$

• Exemple

$$Y = \sum_{i=1}^N X_i$$

où $P[X_i = 1] = p$, $P[X_i = 0] = q = 1 - p$ et N est une va.

Changements de variables

- **Problème**

Étant donné un couple de variables aléatoires réelles (X, Y) de loi connue, on cherche à déterminer **la loi de** $(U, V) = g(X, Y)$ où g est une fonction de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R}^2 et U et V sont deux fonctions de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R} .

- **Variables aléatoires discrètes**

- **Définition**

$$P[(U, V) = (u_k, v_l)] = \sum_{i,j | g(x_i, y_j) = (u_k, v_l)} p[X = x_i, Y = y_j]$$

- **Exemple**

voir TD

Changements de va continues de $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$

• Théorème pour g bijective

si (X, Y) est un couple de va continues à valeurs dans un ouvert $O \subset \mathbb{R}^2$ et $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ est une application **bijective** de O dans un ouvert $\Delta \subset \mathbb{R}^2$ continument différentiable ainsi que son inverse g^{-1} , alors $(U, V) = g(X, Y)$ est un couple de va continues de densité

$$p_{U,V}(u, v) = p_{X,Y} [g^{-1}(u, v)] |\det(J)|,$$

où J est la matrice Jacobienne définie par

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix}$$

Changements de va continues de $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$

- **Exemple**

$X \sim \mathcal{N}(0, 1)$, $Y \sim \mathcal{N}(0, 1)$, X et Y va indépendantes.

Quelle est la loi de (R, Θ) avec $X = R \cos \Theta$ et $Y = R \sin \Theta$?

- **Généralisation**

Si g est bijective par morceaux, on **ajoute les contributions de chaque morceau**.

Changements de va continues de $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

● Problème

Si (X, Y) est un couple de va continues de loi connue et $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, on cherche la loi de $U = g(X, Y)$.

● Solutions

- **Variable intermédiaire** : on introduit une va $V = h(X, Y)$ (e.g., $V = X$ ou $V = Y$), on cherche la loi du couple (U, V) , puis la loi marginale de U
- Calcul de la **fonction de répartition** de U

$$P[U < u] = P[g(X, Y) < u] = P[(X, Y) \in \Delta_u] = \int_{\Delta_u} p(x, y) dx dy,$$

- Cas particulier de $U = X + Y$, X et Y indépendantes
Calcul de la **fonction caractéristique** de U .

Que faut-il savoir ?

- Loi d'un couple de va **discrètes** et **continues** : ?
- **Appartenance à un intervalle** : $P[(X, Y) \in \Delta] = ?$
- Comment calculer les lois **marginale**s d'un couple ?
- Comment calculer les lois **conditionnelles** d'un couple ?
- **Indépendance** de deux variables aléatoires ?
- **Espérance mathématique** : $E[XY] = ?$
- **Covariance** : $\text{cov}(X, Y) = ?$
- **Coeff. de corrélation** : $r(X, Y) = ?$, $r(X, Y) \in ?$ Intérêt ?
- **Espérances conditionnelles** : ?
- Trois méthodes de **changements de variables** : ?

Plan du cours

- Chapitre 1 : Éléments de base du calcul des probabilités
- Chapitre 2 : Variables aléatoires réelles
- Chapitre 3 : Couples de variables aléatoires réelles
- Chapitre 4 : Vecteurs Gaussiens
 - Définition
 - Transformation affine
 - Lois marginales, lois conditionnelles, indépendance
 - Lois du χ^2 , de Student et de Fisher
- Chapitre 5 : Convergence et théorèmes limites

Vecteur Gaussien

- **Définition**

On dit que $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)^T$ suit une loi normale à n dimensions et on notera $\mathbf{X} \sim \mathcal{N}_n(\mathbf{m}, \Sigma)$, si la densité de probabilité de \mathbf{X} s'écrit

$$p(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2} \sqrt{\det(\Sigma)}} \exp \left[-\frac{1}{2} (\mathbf{x} - \mathbf{m})^T \Sigma^{-1} (\mathbf{x} - \mathbf{m}) \right]$$

où $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{m} \in \mathbb{R}^n$ et $\Sigma \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est une matrice symétrique définie positive.

- **Cas particuliers**

- $n = 1$

- Σ diagonale

Signification de m et Σ

- Fonction caractéristique

$$\phi(\mathbf{u}) = E \left(e^{i\mathbf{u}^T \mathbf{X}} \right) = \exp \left(i\mathbf{u}^T \mathbf{m} - \frac{1}{2} \mathbf{u}^T \Sigma \mathbf{u} \right)$$

- Fonction génératrice des moments

$$\theta(\mathbf{u}) = E \left(e^{\mathbf{u}^T \mathbf{X}} \right) = \exp \left(\mathbf{u}^T \mathbf{m} + \frac{1}{2} \mathbf{u}^T \Sigma \mathbf{u} \right)$$

- m et Σ

- m est le vecteur moyenne

- Σ est la matrice de covariance

Cas Bivarié

● Fonction caractéristique

$$\phi(\mathbf{u}) = \exp \left[i(u_1 m_1 + u_2 m_2) - \frac{1}{2} \Sigma_{11} u_1^2 - \frac{1}{2} \Sigma_{22} u_2^2 - \Sigma_{12} u_1 u_2 \right]$$

● Dérivées partielles

$$\frac{\partial \phi(\mathbf{u})}{\partial u_1} = \phi(\mathbf{u})(i m_1 - \Sigma_{12} u_2 - \Sigma_{11} u_1)$$

$$\frac{\partial \phi(\mathbf{u})}{\partial u_2} = \phi(\mathbf{u})(i m_2 - \Sigma_{12} u_1 - \Sigma_{22} u_2)$$

$$\frac{\partial^2 \phi(\mathbf{u})}{\partial u_1 \partial u_2} = \phi(\mathbf{u})(i m_1 - \Sigma_{12} u_2 - \Sigma_{11} u_1)(i m_2 - \Sigma_{12} u_1 - \Sigma_{22} u_2) - \Sigma_{12} \phi(\mathbf{u})$$

● Moments

$$\left. \frac{\partial \phi(\mathbf{u})}{\partial u_1} \right|_{\mathbf{u}=0} = i E[X_1] = i m_1, \quad \left. \frac{\partial \phi(\mathbf{u})}{\partial u_2} \right|_{\mathbf{u}=0} = i E[X_2] = i m_2$$

$$\left. \frac{\partial^2 \phi(\mathbf{u})}{\partial u_1 \partial u_2} \right|_{\mathbf{u}=0} = -E[X_1 X_2] = -m_1 m_2 - \Sigma_{12}$$

Transformation affine

• **Problème** : Soit $\mathbf{X} \sim \mathcal{N}_n(\mathbf{m}, \Sigma)$ un vecteur Gaussien. Quelle est la loi de $\mathbf{Y} = \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{b}$, où \mathbf{Y} est un vecteur aléatoire de \mathbb{R}^p , $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^p$ et \mathbf{A} est une matrice de taille $p \times n$ avec $p \leq n$?

• **Idée** : on calcule la fonction génératrice de $\mathbf{Y} = \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{b}$

$$\theta_{\mathbf{Y}}(\mathbf{v}) = \exp \left[\mathbf{v}^T (\mathbf{A}\mathbf{m} + \mathbf{b}) + \frac{1}{2} \mathbf{v}^T \mathbf{A}\Sigma\mathbf{A}^T \mathbf{v} \right]$$

• **Conclusion**

$$\mathbf{Y} \sim \mathcal{N}_p(\mathbf{A}\mathbf{m} + \mathbf{b}, \mathbf{A}\Sigma\mathbf{A}^T)$$

si \mathbf{A} est de rang p (i.e., de rang maximal).

Lois marginales

- Hypothèses

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} \mathbf{X}' \\ \mathbf{X}'' \end{pmatrix} \sim \mathcal{N}_n(\mathbf{m}, \Sigma), \quad \mathbf{m} = \begin{pmatrix} \mathbf{m}' \\ \mathbf{m}'' \end{pmatrix}, \quad \Sigma = \begin{pmatrix} \Sigma' & \mathbf{M} \\ \mathbf{M}^T & \Sigma'' \end{pmatrix}$$

- Problème

Quelle est la loi de \mathbf{X}' ?

- Conclusion

$$\mathbf{X}' \sim \mathcal{N}_p(\mathbf{m}', \Sigma')$$

où p est la dimension de \mathbf{X}' .

Indépendance

Hypothèses

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} \mathbf{X}' \\ \mathbf{X}'' \end{pmatrix} \sim \mathcal{N}_n(\mathbf{m}, \Sigma), \quad \mathbf{m} = \begin{pmatrix} m' \\ m'' \end{pmatrix}, \quad \Sigma = \begin{pmatrix} \Sigma' & M \\ M^T & \Sigma'' \end{pmatrix}$$

Conclusion

\mathbf{X}' et \mathbf{X}'' sont des vecteurs **indépendants** si et ssi $M = 0$.

Loi du chi2

- **Définition**

Si X_1, \dots, X_n sont n va indépendantes de loi $\mathcal{N}(0, 1)$, alors $Y = \sum_{i=1}^n X_i^2 \sim \chi_n^2$ suit une **loi du chi2** à n degrés de liberté.

- **Propriétés**

- **Densité de probabilité** : $p_n(y) = \frac{y^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{y}{2}}}{2^{\frac{n}{2}} \Gamma(\frac{n}{2})} \mathbb{I}_{\mathbb{R}^+}(y)$

- **Fonction caractéristique** : $\phi_n(t) = (1 - 2it)^{-\frac{n}{2}}$

- **Moyenne et variance** : $E(Y) = n$ et $\text{var}(Y) = 2n$

- **Additivité** : si $Y \sim \chi_n^2$, $Z \sim \chi_m^2$, Y et Z ind. alors

$$Y + Z \sim \chi_{n+m}^2$$

Loi de Student

- **Définition**

Si $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$, $Y \sim \chi_n^2$, X et Y indépendantes, alors

$$Z = \frac{X}{\sqrt{\frac{Y}{n}}} \sim t_n$$

- **Propriétés**

- **Densité de probabilité**

$$p_n(z) = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{n\pi}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \left(1 + \frac{z^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}} \mathbb{I}_{\mathbb{R}^+}(z)$$

- **Moyenne et variance (pour $n > 2$)**

$$E(Z) = 0 \text{ et } \text{var}(Z) = \frac{n}{n-2}$$

- pour $n = 1$, on a une **loi de Cauchy**

Loi de Fisher

- **Définition**

Si $X \sim \chi_n^2$, $Y \sim \chi_m^2$, X et Y indépendantes, alors

$$Z = \frac{X/n}{Y/m} \sim f_{n,m}$$

- **Propriétés**

- **Densité de probabilité connue (voir livres)**

- **Moyenne et variance (pour $m > 4$)**

$$E(Z) = \frac{m}{m-2} \text{ et } \text{var}(Z) = \frac{2m^2(n+m-2)}{n(m-4)(m-2)^2}$$

Que faut-il savoir ?

$$\mathbf{X} \sim \mathcal{N}_n(\mathbf{m}, \Sigma)$$

- **Signification** de \mathbf{m} et de Σ ?
- Transformation **affine** ($\mathbf{Y} = \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{b}$) d'un vecteur gaussien ? Condition sur la matrice \mathbf{A} associée ?
- Lois **marginales** d'un vecteur gaussien ?
- **Indépendance** de deux sous vecteurs d'un vecteur gaussien ?
- loi de $Y = \sum_{i=1}^n X_i^2 \sim \chi_n^2$?

Plan du cours

- **Chapitre 1** : Éléments de base du calcul des probabilités
- **Chapitre 2** : Variables aléatoires réelles
- **Chapitre 3** : Couples de variables aléatoires réelles
- **Chapitre 4** : Vecteurs Gaussiens
- **Chapitre 5** : Convergence et théorèmes limites
 - Convergence (en loi, en probabilité, en moyenne quadratique, presque sure)
 - Théorèmes limites (loi des grands nombres, théorème de la limite centrale)

Convergence en loi

• Définition

La suite de va X_1, \dots, X_n **converge en loi** vers la va X si et ssi la suite des fonctions de répartition $F_n(x) = P[X_n < x]$ converge simplement vers $F(x) = P[X < x]$ **en tout point x où F est continue.**

• Notation

$$X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} X$$

• Exemple

$$P[X_n = 1] = \frac{1}{n} \text{ et } P[X_n = 0] = 1 - \frac{1}{n}$$

Convergence en loi

Propriétés

Théorème de Levy

X_n cv en loi vers X si et ssi ϕ continue en $t = 0$ et

$$\phi_n(t) = E [e^{itX_n}] \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \phi(t) = E [e^{itX}], \forall t.$$

Si X_n est une suite de va continues de densités

$p_n(x)$ et que $p_n(x) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} p(x)$ p.p., alors $X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} X$.

Si $X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} X$ et $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue, alors

$$g(X_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} g(X).$$

Convergence en probabilité

● Définition

La suite de va X_1, \dots, X_n converge en probabilité vers la va X si et ssi $\forall \epsilon > 0$, on a

$$P[|X_n - X| > \epsilon] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

● Notation

$$X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{P}} X$$

● Exemple : X_n de densité $p_n(x) = \frac{ne^{-nx}}{(1+e^{-nx})^2}$.

● Propriété

Si $X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{P}} X$ et $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue, alors

$$g(X_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{P}} g(X).$$

Convergence en moyenne quadratique

• Définition

La suite de va X_1, \dots, X_n converge en moyenne quadratique vers la va X si et ssi

$$E [(X_n - X)^2] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

• Notation

$$X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{MQ} X$$

• Exemple

$$P[X_n = n] = \frac{1}{n^p} \text{ et } P[X_n = 0] = 1 - \frac{1}{n^p}$$

avec $p = 2$ et $p = 3$.

Convergence presque sûre

- **Définition**

La suite de va X_1, \dots, X_n converge presque sûrement vers la va X si et ssi

$$X_n(\omega) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} X(\omega), \quad \forall \omega \in A | P(A) = 1.$$

- **Notation**

$$X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{PS}} X$$

- **Comparaison** entre les différents types de convergence

Loi faible des grands nombres

Loi faible des grands nombres

Si X_1, \dots, X_n sont des va indépendantes et de même loi de moyenne $E[X_k] = m < \infty$, alors la va

$\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k$ converge en probabilité vers m .

Preuve

$$\varphi_{\bar{X}_n}(t) = E \left[e^{it \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k} \right] = E \left[\prod_{k=1}^n e^{i \frac{t}{n} X_k} \right] = \left[\varphi \left(\frac{t}{n} \right) \right]^n$$

Dév. de Taylor de ϕ

$$\varphi(t) = \varphi(0) + t\varphi'(0) + t\lambda(t) = 1 + itm + t\lambda(t)$$

Preuve

On en déduit

$$\ln [\varphi_{\bar{X}_n}(t)] = n \ln \left[1 + i \frac{t}{n} m + \frac{t}{n} \lambda \left(\frac{t}{n} \right) \right] = n \left[i \frac{t}{n} m + \frac{t}{n} \lambda \left(\frac{t}{n} \right) \right]$$

d'où

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_{\bar{X}_n}(t) = e^{itm} \quad \forall t$$

i.e.,

$$\bar{X}_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} m \Leftrightarrow \bar{X}_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{P}} m$$

Loi forte des grands nombres

- Loi forte des grands nombres

Si X_1, \dots, X_n sont des va indépendantes et de même loi de moyenne $E[X_k] = m < \infty$ et de variance $\sigma^2 < \infty$, alors la va $\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k$ converge en moyenne quadratique vers m .

- Preuve

$$E \left[(\bar{X} - m)^2 \right] = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n E [(X_k - m) (X_l - m)]$$

Mais

$$E [(X_k - m) (X_l - m)] = \begin{cases} \sigma^2 & \text{si } k = l \\ 0 & \text{si } k \neq l \end{cases}$$

Preuve

Donc

$$E \left[(\bar{X}_n - m)^2 \right] = \frac{\sigma^2}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

i.e.,

$$\bar{X}_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{MQ} m$$

Théorème de la limite centrale

• Théorème de la limite centrale

Si X_1, \dots, X_n sont des va indépendantes et de même loi de moyenne $E[X_k] = m < \infty$ et de variance $\sigma^2 < \infty$, alors la va centrée réduite $Y_n = \frac{\sum_{k=1}^n X_k - nm}{\sqrt{n\sigma^2}}$ converge en loi vers la loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$.

• Preuve

$$\varphi_{Y_n}(t) = E[e^{itY_n}] = e^{-\frac{itm\sqrt{n}}{\sigma}} \prod_{k=1}^n E\left[e^{i\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}X_k}\right]$$

Mais

$$E\left[e^{i\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}X_k}\right] = \varphi\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)$$

Preuve

Donc

$$\ln [\varphi_{Y_n}(t)] = -\frac{itm\sqrt{n}}{\sigma} + n \ln \varphi \left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}} \right)$$

En utilisant le développement de Taylor de φ

$$\varphi(t) = \varphi(0) + t\varphi'(0) + \frac{t^2}{2}\varphi''(0) + t^2\lambda(t)$$

On en déduit

$$\ln [\varphi_{Y_n}(t)] = -\frac{t^2}{2} + \frac{t^2}{n}\lambda \left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}} \right)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_{Y_n}(t) = e^{-\frac{t^2}{2}} \quad \forall t \Leftrightarrow Y_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, 1)$$

Que faut-il savoir ?

- Convergence en **loi** ?
- Convergence en **moyenne quadratique** ?
- $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k$ converge en probabilité vers ? Conditions ?
- $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k$ converge en moyenne quadratique vers ? Conditions ?
- $Y_n = \frac{\sum_{k=1}^n X_k - ?}{?}$ converge en loi vers ?