

Exercice 1 : Tirages sans remise.

On considère une urne constituée de $N > 1$ boules numérotées de 1 à N . On tire deux boules sans remise dans cette urne. On note X_1 le numéro de la première boule et X_2 le numéro de la seconde boule.

- 1) Déterminer les lois de X_1, X_2 et du couple (X_1, X_2) (on prendra soin de préciser les domaines de ces variables et vecteur aléatoires).
- 2) Déterminer la covariance entre X_1 et X_2 . On rappelle que

$$\sum_{j=1}^n j = \frac{n(n+1)}{2} \text{ et } \sum_{j=1}^n j^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

- 3) Déterminer la loi du couple (Z, U) avec $Z = X_1 - X_2$ et $U = X_1$ (on prendra soin de représenter graphiquement l'ensemble des valeurs possibles du couple (Z, U)). En déduire la loi de Z .

Exercice 2 : Décorrélacion n'implique pas indépendance !

Soit X une variable aléatoire de loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$ et Y une variable aléatoire binaire prenant les valeurs $+1$ et -1 avec $P[Y = 1] = P[Y = -1] = \frac{1}{2}$. On suppose que X et Y sont indépendantes et on pose $Z = XY$.

- 1) Déterminer la loi de Z .
- 2) Déterminer la covariance du couple (X, Z) notée $\text{cov}(X, Z)$.
- 3) Calculer $P[X + Z = 0]$ et en déduire que X et Z ne sont pas indépendantes.

Exercice 3 : couple de variables aléatoires discrète et continue.

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires réelles telles que Y suit une loi exponentielle de paramètre c (de densité notée $g(y)$) et pour $y > 0$ la loi de X sachant $Y = y$ est la loi de Poisson de paramètre y

$$\begin{aligned} g(y) &= ce^{-cy} & y > 0 \\ g(y) &= 0 & y \leq 0 \\ P[X = k | Y = y] &= \frac{y^k}{k!} e^{-y} & k \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

Déterminer $P[X = k]$.

Exercice 4 : parties entières et fractionnaires

Soit U une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0, 1[$. Si k est un entier fixé ($k \in \mathbb{N}^*$), on définit les variables aléatoires X et Y de la façon suivante

$$\begin{aligned} X &= \text{Ent}(kU) \\ Y &= \text{Frac}(kU) = kU - \text{Ent}(kU) \end{aligned}$$

où $\text{Ent}(kU)$ et $\text{Frac}(kU)$ désignent les parties entières et fractionnaires de kU . Montrer que X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes, la première de loi uniforme sur $\{0, \dots, k-1\}$, la seconde de loi uniforme sur $[0, 1[$.

Réponses

Exercice 1

1) X_1 et X_2 suivent des lois uniformes sur $\{1, \dots, N\}$ tandis que le couple (X_1, X_2) suit une loi uniforme sur $\{(i, j), i \in \{1, \dots, N\}, j \in \{1, \dots, N\}, i \neq j\}$, c'est-à-dire

$$P[X_1 = i, X_2 = j] = \frac{1}{N(N-1)} \quad i \in \{1, \dots, N\}, j \in \{1, \dots, N\}, i \neq j$$

2) Il est clair que $E[X_1] = E[X_2] = \frac{N+1}{2}$. De plus

$$\begin{aligned} E[X_1 X_2] &= \sum_{i \neq j} ij \frac{1}{N(N-1)} \\ &= \frac{1}{N(N-1)} \sum_{i \neq j} ij \\ &= \frac{1}{N(N-1)} \left[\sum_{i,j} ij - \sum_i i^2 \right] \end{aligned}$$

Des calculs simples permettent d'obtenir

$$E[X_1 X_2] = \frac{(N+1)(3N+2)}{12}$$

et par suite

$$\text{cov}(X_1, X_2) = -\frac{N+1}{12}.$$

3) Le changement de variables est tel que

$$\begin{cases} Z = X_1 - X_2 \\ U = X_1 \end{cases} \iff \begin{cases} X_1 = U \\ X_2 = U - Z \end{cases}$$

donc il est bijectif de

$$\{(i, j), i = 1, \dots, N, j = 1, \dots, N, i \neq j\}$$

dans

$$\{(u, z), u \in \{1, \dots, N\}, z \in \{u-N, \dots, u-1\}, z \neq 0\}$$

Le couple (Z, U) suit une loi uniforme sur son ensemble de définition.

Z est à valeurs dans $\{-(N-1), \dots, -2, -1\} \cup \{1, 2, \dots, N-1\}$ et

On a

$$P[Z = z] = \frac{N-|z|}{N(N-1)} \quad z \in \{-(N-1), \dots, -2, -1\} \cup \{1, 2, \dots, N-1\}.$$

Exercice 2

1) On détermine la fonction de répartition de Z

$$\begin{aligned} P[Z < z] &= P[XY < z] \\ &= P[X < z, Y = 1] + P[-X < z, Y = -1]. \end{aligned}$$

Puisque X et Y sont indépendantes, on a

$$\begin{aligned} P[Z < z] &= P[X < z] P[Y = 1] + P[X > -z] P[Y = -1] \\ &= F(z) \times \frac{1}{2} + F(z) \times \frac{1}{2} \\ &= F(z) \end{aligned}$$

où $F(z)$ est la fonction de répartition de la loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$. Donc $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$.

2) La covariance du couple (X, Z) est définie par

$$\begin{aligned} \text{cov}(X, Z) &= E[XZ] - E[X]E[Z] \\ &= E[X^2Y] - E[X]E[XY]. \end{aligned}$$

Puisque $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$, on a $E[X] = 0$ et $E[X^2] = 1$. De plus $E[Y] = 0$ (Y prend les valeurs $+1$ et -1 de manière équiprobable), d'où en utilisant l'indépendance entre les variables X et Y

$$\text{cov}(X, Z) = 0.$$

3) La probabilité recherchée s'écrit

$$\begin{aligned} P[X + Z = 0] &= P[X + XY] = 0 \\ &= P[X(1 + Y) = 0] \\ &= P[Y = -1] = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

On a une chance sur 2 d'avoir $Z = -X$, donc X et Z ne sont pas indépendantes même si $\text{cov}(X, Z) = 0$. Ceci est un exemple de couple de variables aléatoires non indépendantes de covariance nulle

Exercice 3

L'objectif de cet exercice est d'étudier un exemple de couple de variables aléatoires (X, Y) tel que l'une des deux variables Y est discrète tandis que l'autre variable X est continue. En utilisant les résultats concernant les probabilités conditionnelles, on obtient

$$\begin{aligned} P[Y = k] &= \int_{\mathbb{R}} P[X = k|Y = y]g(y)dy \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{y^k}{k!} e^{-y} \times ce^{-cy} dy \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{cy^k}{k!} e^{-(c+1)y} dy. \end{aligned}$$

En effectuant le changement de variables $u = (c + 1)y$, on obtient

$$\begin{aligned} P[Y = k] &= \int_0^{+\infty} \frac{c}{k!} \frac{u^k}{(c+1)^k} e^{-u} \times \frac{du}{c+1} \\ &= \frac{c}{(c+1)^{k+1}}, \quad k \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

en utilisant le fait que

$$\Gamma(k+1) = \int_0^{+\infty} u^k e^{-u} du = k!.$$

Exercice 4

Loi de X

Il est clair que X est à valeurs dans $\{0, \dots, k-1\}$. De plus

$$\begin{aligned} P[X = i] &= P[i \leq kU < i+1] \\ &= P\left[\frac{i}{k} \leq U < \frac{i+1}{k}\right] \\ &= \int_{\frac{i}{k}}^{\frac{i+1}{k}} du = \frac{1}{k} \end{aligned}$$

Donc X suit la loi uniforme sur $\{0, \dots, k-1\}$

Loi de Y

Il est clair que Y est à valeurs dans $[0, 1[$.

Pour $y < 0$, il est clair que $P[Y < y] = 0$

Pour $y \geq 1$, il est clair que $P[Y < y] = 1$

Pour $y \in [0, 1[$, on a

$$\begin{aligned} P[Y < y] &= P\left[\bigcup_{i=0}^{k-1} \{Y < y, X = i\}\right] \\ &= \sum_{i=0}^{k-1} P[Y < y, X = i] \\ &= \sum_{i=0}^{k-1} P[kU - i < y, i \leq kU < i + 1] \\ &= \sum_{i=0}^{k-1} P\left[U < \frac{y+i}{k}, \frac{i}{k} \leq U < \frac{i+1}{k}\right] \\ &= \sum_{i=0}^{k-1} P\left[\frac{i}{k} \leq U < \frac{y+i}{k}\right] \\ &= \sum_{i=0}^{k-1} \frac{y}{k} = y \end{aligned}$$

Donc Y suit la loi uniforme sur $[0, 1[$.

Indépendance de X et de Y

Pour montrer que X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes, il suffit de montrer que

$$P[X = i, Y < y] = P[X = i] P[Y < y] \quad \forall i \in \{0, \dots, k-1\}, \forall y \in [0, 1[.$$

Or

$$\begin{aligned} P[X = i, Y < y] &= P[i \leq kU < i + 1, kU - i < y] \\ &= P\left[U < \frac{y+i}{k}, \frac{i}{k} \leq U < \frac{i+1}{k}\right] \\ &= \frac{y}{k} \text{ (d'après ce qui précède).} \end{aligned}$$

On a bien $P[X = i, Y < y] = P[X = i] P[Y < y]$, ce qui signifie que X et Y sont des variables aléatoires indépendantes.