TD6 - Probabilités et Statistiques

Convergences

Exercice 1

1) Soit Y une variable aléatoire de loi uniforme sur $[-1, +1]$. Déterminer la fonction caractéristique de Y. On considère une suite $(X_j)_{j\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires indépendantes de loi :

$$P\left[X_j = \frac{1}{2^j}\right] = \frac{1}{2} \text{ et } P\left[X_j = -\frac{1}{2^j}\right] = \frac{1}{2}$$

On pose $S_n = \sum_{j=1}^{n} X_j$.

2) Déterminer la fonction caractéristique de X_j, puis celle de S_n notée $\varphi_n(t)$.

3) En utilisant la formule $\sin t = 2\sin(t/2)\cos(t/2)$, vérifier que :

$$\varphi_n(t) = \frac{\sin t}{t}\frac{\frac{t}{2^n}}{\sin\frac{t}{2^n}} \qquad t \neq 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$$

4) En déduire que S_n converge en loi vers une variable aléatoire que l'on précisera.

Exercice 2 :

Soit la suite de va X_n définie pour $n \in \mathbb{N}$ par :

$$\begin{aligned} P[X_n = 0] &= 1 - \frac{1}{n} \\ P[X_n = n] &= \frac{1}{n} \end{aligned}$$

Montrer que la suite X_n converge en loi et en probabilité vers $X = 0$ mais que X_n ne converge pas en moyenne quadratique vers $X = 0$.

Exercice 3 : Soit $F(x)$ une fonction de répartition telle que :

$$\begin{array}{cc} F(x) = 0 & x < a \\ 0 < F(x) < 1 & a \leq x < b \\ F(x) = 1 & x \geq b \end{array}$$

Soit X_n une suite de va indépendantes de même fonction de répartition F. On pose $Y_n = \inf(X_1, ..., X_n)$ et $Z_n = \sup(X_1, ..., X_n)$. Montrer que Y_n et Z_n convergent en loi vers les constantes a et b.

Exercice 4

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de va de densité

$$f_n(x) = \frac{n}{\pi\left(1+n^2x^2\right)} \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

Montrer que la suite X_n converge en probabilité vers 0. Que dire de la convergence en loi et de la convergence en moyenne quadratique ?

Exercice 5

On considère une suite de variables aléatoires indépendantes X_j de même loi de Poisson de paramètre $\theta = 1$.

1) Quelle est la loi de $S_n = \sum_{j=1}^n X_j$?

2) Soit $T_n = \frac{S_n - n}{\sqrt{n}}$. En utilisant le théorème de la limite centrale et en considérant les événements $\{T_n \leq 0\}$, montrer que :

$$\lim_{n\to+\infty} e^{-n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{n^k}{k!} = \frac{1}{2}$$

Applications en Télécommunications/Réseaux

Exercice 6

Afin de tester les performances d'un système de communications numériques, il est usuel de simuler le fonctionnement de ce système sur un ordinateur (vous ferez ce genre de simulations sous Matlab en BE). Un des problèmes consiste alors à estimer la probabilité d'erreur p associé à ce système. On estime généralement cette probabilité comme suit :

$$\widehat{p} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} X_i$$

où X_i est une variable aléatoire binaire telle que

$$\begin{aligned} X_i &= 1 \text{ s'il y a une erreur pour le } i^{\grave{e}me} \text{ symbole (évènement de probabilité } p) \\ X_i &= 0 \text{ s'il n'y a pas d'erreur pour le } i^{\grave{e}me} \text{ symbole (évènement de probabilité } 1-p) \end{aligned}$$

Déterminer la moyenne et la variance de $\widehat{p}$ puis sa loi limite en utilisant le théorème de la limite centrale. On cherche le nombre de points N nécessaire pour que $\widehat{p}$ soit une approximation de p avec une précision relative inférieure à 10%. Pour cela, on se fixe un degré de confiance $\alpha = 95\%$, qui indique la probabilité d'avoir cette précision soit

$$P\left[\left|\frac{\widehat{p}-p}{p}\right| < \varepsilon\right] = \alpha$$

Déterminer N pour que l'égalité précédente soit vérifiée.

Remarque : pour $\varepsilon = 20\%$, on trouve $N \simeq 100/p$ d'où $Np \simeq N\widehat{p} \simeq 100$, d'où la règle pratique suivante : il suffit d'observer une centaine d'erreurs pour pouvoir estimer la probabilité d'erreur p à l'aide de l'estimateur $\widehat{p}$ avec une précision relative $\varepsilon = 20\%$ et un degré de confiance $\alpha = 95\%$.

Exercice 1

1)

$$E\left[e^{itY}\right] = \frac{\sin t}{t}$$

2)

$$E\left[e^{itX_k}\right] = \cos\left(\frac{t}{2^j}\right)$$

et

$$E\left[e^{itS_n}\right] = \cos\left(\frac{t}{2}\right)\cos\left(\frac{t}{2^2}\right)...\cos\left(\frac{t}{2^n}\right)$$

3)

$$E\left[e^{itS_n}\right] = \frac{\sin t}{t}\frac{\frac{t}{2^n}}{\sin\left(\frac{t}{2^n}\right)}$$

4) On a

$$E\left[e^{itS_n}\right] \underset{n\to\infty}{\to} \frac{\sin t}{t}$$

qui est une fonction continue en $t = 0$ donc S_n converge en loi vers Y.

Exercice 2

1)

$$E\left[e^{itX_n}\right] = \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n}e^{itn} \underset{n\to\infty}{\to} 1 = E\left[e^{it0}\right]$$

qui est une fonction continue en $t = 0$ donc X_n converge en loi vers 0.

2)

$$P\left[|X_n| > \varepsilon\right] = \frac{1}{n}, \forall\varepsilon > 0$$

donc

$$\lim_{n\to\infty} P\left[|X_n| > \varepsilon\right] = 0, \forall\varepsilon > 0$$

ce qui signifie que X_n converge en probabilité vers $X = 0$.

3) $E\left[X_n^2\right] = n$ donc X_n ne converge pas en moyenne quadratique vers 0

Exercice 3

1)

$$\begin{aligned} G_n(t) &= P\left[\inf(X_1, ..., X_n) < t\right] \\ &= 1 - P\left[\inf(X_1, ..., X_n) \geq t\right] \\ &= 1 - (1 - F(t))^n \end{aligned}$$

donc

$$\lim_{n\to\infty} G_n(t) = \left\{\begin{array}{c} 0 \text{ si } t < a \\ 1 \text{ si } t > b \\ 1 \text{ si } t \in [a, b[\end{array}\right.$$

ce qui signifie que Y_n converge en loi vers la constante a.

2) la démarche est similaire pour Z_n

Exercice 5

1) On sait que si X et Y sont des variables aléatoires indépendantes suivant des lois de Poisson de paramètres λ et μ, alors $X+Y$ suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda+\mu$. On en déduit

$$S_n = \sum_{j=1}^{n} X_j \sim P(n\theta)$$

2) Le théorème de la limite centrale s'écrit

$$\frac{S_n - n}{\sqrt{n}} \underset{n\to\infty}{\overset{L}{\to}} \mathcal{N}(0,1)$$

donc

$$P[T_n < 0] \underset{n\to\infty}{\to} \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \frac{1}{2}$$

Mais

$$\begin{aligned} P[T_n < 0] &= P[S_n < n] \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} P[S_n = k] \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} \frac{n^k}{k!} e^{-n} \end{aligned}$$

ce qui donne le résultat attendu.

Exercice 6

On a

$$E[\hat{p}] = p \text{ et } var[\hat{p}] = \frac{p(1-p)}{N}$$

D'après le théorème de la limite centrale, on a

$$\frac{\hat{p} - p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{N}}} \underset{N\to\infty}{\overset{L}{\to}} \mathcal{N}(0,1)$$

Donc pour N grand, on peut approcher la loi de $\hat{p}$ par une loi normale $\mathcal{N}\left(p, \frac{p(1-p)}{N}\right)$. On en déduit

$$P\left[\left|\frac{\widehat{p} - p}{p}\right| < \varepsilon\right] = P\left[\left|\frac{\widehat{p} - p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{N}}}\right| < \varepsilon\sqrt{\frac{pN}{1-p}}\right]$$

Pour $P\left[\left|\frac{\widehat{p}-p}{p}\right| < \varepsilon\right] = 0.95$, les tables de la loi normale donnent

$$\varepsilon\sqrt{\frac{pN}{1-p}} = 1.96 \text{ soit } N = \left(\frac{1.96}{\varepsilon}\right)^2 \frac{1-p}{p}$$