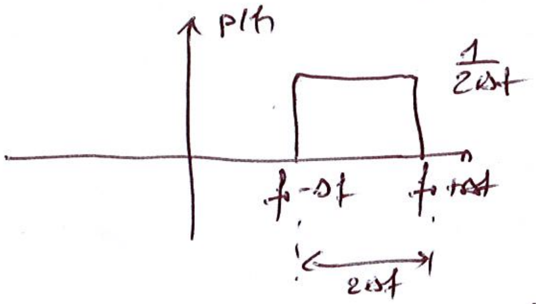
Ex. 1 • On a $x(t) = e^{j2\pi f t} e^{j\phi}$ donc la moyenne de $x(t)$ est

(1)

$$E[x(t)] = e^{j\phi} E[e^{j2\pi f t}]$$
$$= e^{j\phi} \int e^{j2\pi f t} p(f)\, df$$

où $p(f)$ est la densité de probabilité de la fréquence f, soit

$$p(f) = \frac{1}{2\Delta f} \mathbb{1}_{]f_0-\Delta f,\, f_0+\Delta f[}(f) = \frac{1}{2\Delta f} \Pi_{2\Delta f}(f-f_0)$$



où $\mathbb{1}_A(f)$ est la fonction indicatrice sur l'ensemble A

On observe que $\int e^{j2\pi f t} p(f)\, df$ est la transformée de Fourier inverse de $p(f)$ donc

$$E[x(t)] = e^{j\phi}\, TF^{-1}\left[\frac{1}{2\Delta f} \Pi_{2\Delta f}(f-f_0)\right]$$
$$= e^{j\phi} \frac{1}{2\Delta f}(2\Delta f) \operatorname{sinc}(2\pi \Delta f t)\, e^{j2\pi f_0 t}$$

(1,5 pt) $$= \boxed{e^{j(2\pi f_0 t + \phi)} \operatorname{sinc}(2\pi \Delta f t)}$$

~~puisque~~ le signal $x(t)$ n'est pas stationnaire car $E[x(t)]$ dépend de t

• Fonction d'autocorrélation

$$E[x(t)\, x^*(t-\tau)] = E[e^{j\phi} e^{j2\pi f t} e^{-j\phi} e^{-j2\pi f(t-\tau)}]$$

(0,5) $$= E[e^{j2\pi f \tau}]$$

Ce calcul a été fait à la question précédente. On a

(0,5) $$\boxed{R_x(\tau) = e^{j2\pi f_0 \tau} \operatorname{sinc}(2\pi \Delta f \tau)}$$

La densité spectrale de puissance est

(1) $$S_x(f) = \delta(f-f_0) * \frac{1}{2\Delta f} \Pi_{2\Delta f}(f) = \boxed{\frac{1}{2\Delta f} \Pi_{2\Delta f}(f-f_0)}$$

La puissance du signal $x(t)$ est

0,5 pr $\quad P = Rx(0) = \boxed{1}$

Ex2 Rapport signal sur bruit à l'entrée du filtre

La puissance du signal aléatoire $a(t) = A\cos(2\pi f_0 t + \phi)$ est
$P_a = Ra(0) = \int Sa(f)\,df$ où $Ra(\tau)$ et $Sa(f)$ sont la fonction d'autocorrélation et la densité spectrale de puissance de $a(t)$.

On a vu en cours $Ra(\tau) = \frac{A^2}{2}\cos(2\pi f_0\tau)$, $Sa(f) = \frac{A^2}{4}[\delta(f-f_0)+\delta(f+f_0)]$

et $\boxed{P_a = \frac{A^2}{2}}$ 0,5

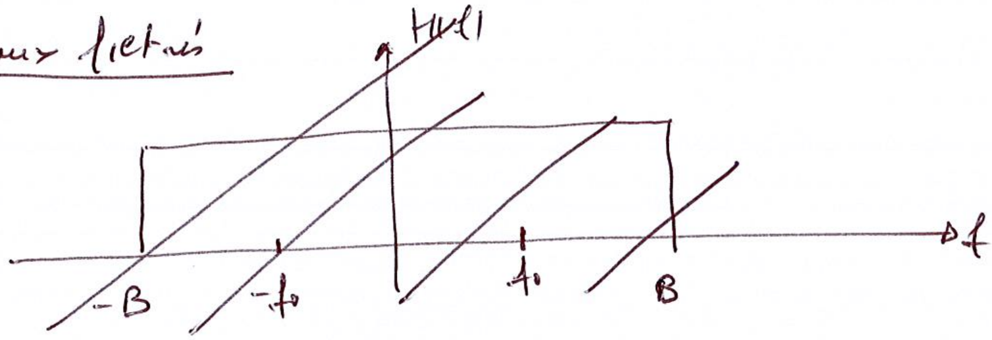
La puissance du bruit est

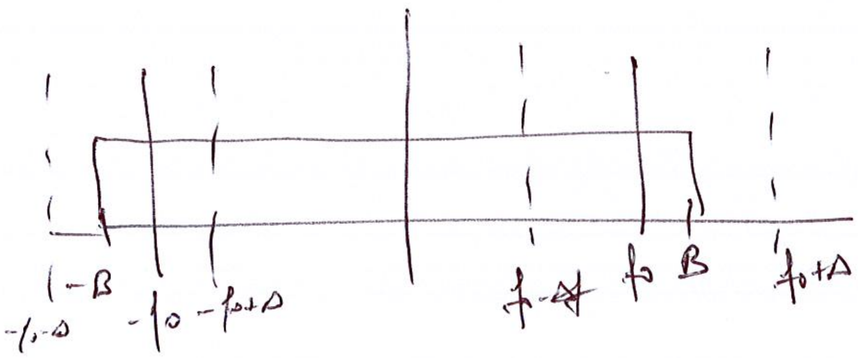
$$P_b = \int Sb(f)\,df = \int_{-f_0-\Delta f}^{-f_0+\Delta f} \frac{1}{\Delta f}\,df + \int_{f_0-\Delta f}^{f_0+\Delta f} \frac{1}{\Delta f}\,df$$

$$= \boxed{4}$$

d'où $\boxed{\gamma_e = \frac{P_a}{P_e} = \frac{A^2}{8}}$ 0,5

Puissance des signaux filtrés





3 $\boxed{P_{za}}$ $\quad S_{za}(f) = S_a(f)\,|H(f)|^2 = S_a(f) = \frac{A^2}{4}\left[\delta(f-f_0) + \delta(f+f_0)\right]$

Donc $\boxed{P_{za} = P_a}$.

0,5 Comme la fréquence f_0 est dans la bande du filtre, la puissance du signal filtré est égale à la puissance de $a(t)$ (signal non filtré)

$\boxed{P_{zb}}$ $\quad S_{zb}(f) = S_b(f)\,|H(f)|^2$

donc $\quad P_{zb} = \int S_{zb}(f)\,df = \int_{-B}^{B} S_b(f)\,df = \int_{-B}^{-f_0+\Delta} + \int_{f_0-\Delta}^{B} \frac{1}{\Delta}\,df$

voir dessin

donc $\quad P_{zb} = \frac{1}{\Delta} \times (B - f_0 + \Delta) \times 2 = \boxed{\frac{2(B - f_0 + \Delta)}{\Delta}}$

0,5

Rapport signal sur bruit en sortie du filtre

On a $\quad B < f_0 + \Delta \quad$ donc $\quad B - f_0 < \Delta$

donc $\quad P_{zb} < \frac{2(2\Delta)}{\Delta} = 4$

1 donc $\quad \gamma_s = \frac{P_{za}}{P_{zb}} = \frac{A^2/2}{P_{zb}} > \boxed{\frac{A^2}{8} = \gamma_a}$

On a donc amélioré le rapport sur bruit

Ex3 $\quad$ 1) Cette question a été vue en cours

$\mathrm{Var}\,U = E[X^2(t)] = R_X(0)$

$\mathrm{Var}\,V = E[X^2(t-\tau)] = R_X(0)$

$\mathrm{Cov}(U,V) = E[UV] = E[X(t)X(t-\tau)] = R_X(\tau)$

0,5 donc $\quad \boxed{\Sigma = \begin{pmatrix} R_X(0) & R_X(\tau) \\ R_X(\tau) & R_X(0) \end{pmatrix}}$

On en déduit $\quad R_Y(\tau) = E[Y(t)Y(t-\tau)] = E[G(X(t))\,G(X(t-\tau))]$

donc $R_Y(\tau) = \iint G(u)\, G(v)\; p(u,v)\, du\, dv$

où $p(u,v)$ est la densité de probabilité de $(U,V) = (X(t), X(t-\tau))$

On en déduit

1 $$R_Y(\tau) = \iint G(u)\, G(v) \frac{1}{2\pi\sqrt{R_X^2(0) - R_X^2(\tau)}} \exp\left[-\frac{1}{2}(u\ v)\, \Sigma^{-1} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}\right] du\, dv$$

qui ne dépend que de $R_X(0)$ et $R_X(\tau)$

2) D'après le théorème de Price

$$\frac{\partial R_Y(\tau)}{\partial R_X(\tau)} = E\left[\frac{\partial Y(t)}{\partial X(t)} \frac{\partial Y(t-\tau)}{\partial X(t-\tau)}\right]$$

$$= E\left[\frac{1}{2\pi} e^{-\frac{X^2(t)}{2}} \cdot e^{-\frac{X^2(t-\tau)}{2}}\right]$$

1 $$= \frac{1}{2\pi} E\left[\exp\left\{-\frac{1}{2}\left[X^2(t) + X^2(t-\tau)\right]\right\}\right]$$

$$= \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{(1-R_X^2(0)) - R_X^2(\tau)}}$$

D'après le rappel

$$\boxed{R_Y(\tau) = \frac{1}{2\pi} \operatorname{Arsin}\left(\frac{R_X(\tau)}{|1 - R_X(0)|}\right) + C}$$

0,5