
EXAMEN TRAITEMENT DU SIGNAL - SIGNAUX ALÉATOIRES - 2 EN

Lundi 3 Décembre 2018

Partiel sans document (Une feuille A4 recto-verso autorisée)

Exercice 1 (4 points)

On considère un signal aléatoire $x(t)$ défini par

$$x(t) = \exp [j(2\pi f t + \phi)]$$

où f est une variable aléatoire uniforme sur l'intervalle $[f_0 - \Delta f, f_0 + \Delta f]$ (où f_0 et Δf sont des constantes telles que $f_0 > \Delta f$) et ϕ est une phase constante appartenant à l'intervalle $]0, 2\pi[$.

- Déterminer la moyenne du signal $x(t)$. Le signal $x(t)$ est-il stationnaire ?
- Calculer la fonction d'autocorrélation, la densité spectrale de puissance et la puissance de $x(t)$.

Exercice 2 (3 points)

On considère un filtre (linéaire invariant dans le temps) passe bas de transmittance $H(f) = \Pi_{2B}(f)$ défini par

$$H(f) = \begin{cases} 1 & \text{si } f \in]-B, B[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

avec $B > 0$. On applique à l'entrée de ce filtre un signal aléatoire $x(t)$ constitué de la somme d'un signal sinusoïdal aléatoire $a(t) = A \cos(2\pi f_0 t + \phi)$, où $A > 0$ et $f_0 > 0$ sont deux constantes et ϕ une phase aléatoire uniforme sur l'intervalle $]0, 2\pi[$ et d'un bruit blanc stationnaire $b(t)$ passe bande de densité spectrale de puissance

$$s_b(f) = \begin{cases} \frac{1}{\Delta} & \text{si } f \in]-f_0 - \Delta, -f_0 + \Delta[\\ \frac{1}{\Delta} & \text{si } f \in]f_0 - \Delta, f_0 + \Delta[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

avec $\Delta \in]0, f_0[$ et $f_0 < B < f_0 + \Delta$. On a donc en sortie de ce filtre un signal noté $z(t)$ défini par

$$z(t) = a(t) * h(t) + b(t) * h(t).$$

avec $h(t) = \text{TF}^{-1} [H(f)]$.

- Déterminer le rapport signal sur bruit à l'entrée du filtre défini par $\gamma_e = \frac{P_a}{P_b}$, où P_a et P_b sont les puissances des signaux $a(t)$ et $b(t)$.
- Déterminer les puissances P_{z_a} et P_{z_b} des signaux filtrés

$$z_a(t) = a(t) * h(t) \quad \text{et} \quad z_b(t) = b(t) * h(t).$$

- Montrer que le rapport signal sur bruit en sortie du filtre défini par $\gamma_s = \frac{P_{z_a}}{P_{z_b}}$ est supérieur à γ_e .

Exercice 3 (3 points)

On considère une non-linéarité modélisant une distorsion de type à “écrêtage progressif”

$$G(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} du - \frac{1}{2}.$$

On l’applique à un processus gaussien réel $X(t)$ stationnaire de moyenne nulle

$$Y(t) = G[X(t)].$$

On rappelle que pour un tel processus, la loi du couple $(U, V) = (X(t), X(t - \tau))$ est gaussienne de densité de probabilité

$$f(u, v) = \frac{1}{2\pi\sqrt{\det \Sigma}} \exp \left[-\frac{1}{2} (u, v) \Sigma^{-1} (u, v)^T \right]$$

où $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ et où Σ est la matrice de covariance du couple (U, V) définie par

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \text{var}(U) & \text{cov}(U, V) \\ \text{cov}(U, V) & \text{var}(V) \end{pmatrix}$$

1) Exprimer les éléments de Σ en fonction de $R_X(\tau)$ et $R_X(0)$. En déduire que l’autocorrélation du signal $Y(t)$ ne dépend que de $R_X(\tau)$ et $R_X(0)$.

2) On admet que pour un signal Gaussien stationnaire de moyenne nulle et de fonction d’autocorrélation $R_X(\tau)$, on a

$$E \left\{ \exp \left[-\frac{X^2(t) + X^2(t - \tau)}{2} \right] \right\} = \frac{1}{\sqrt{(1 - R_X(0))^2 - R_X^2(\tau)}}.$$

et on rappelle la primitive suivante

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - u^2}} du = \arcsin \left(\frac{u}{|a|} \right)$$

En déduire $R_Y(\tau)$ en fonction de $R_X(\tau)$ à une constante additive près qu’on ne demande pas de calculer.

Transformée de Fourier

$$X(f) = \int_{\mathbb{R}} x(t) e^{-i2\pi ft} dt \quad x(t) = \int_{\mathbb{R}} X(f) e^{i2\pi ft} df$$

T.F.

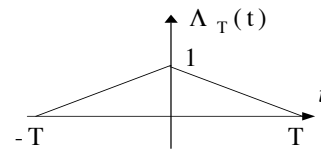
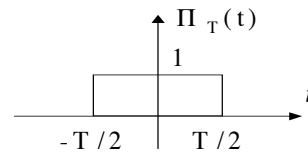
$x(t)$ réelle paire	\Leftrightarrow	$X(f)$ réelle paire
$x(t)$ réelle impaire	\Leftrightarrow	$X(f)$ imaginaire pure impaire
$x(t)$ réel	\Leftrightarrow	$\left\{ \begin{array}{l} \text{Re}\{X(f)\} \text{ paire} \\ \text{Im}\{X(f)\} \text{ impaire} \\ X(f) \text{ pair} \\ \arg\{X(f)\} \text{ impaire} \end{array} \right.$
$ax(t) + by(t)$	\Leftrightarrow	$aX(f) + bY(f)$
$x(t - t_0)$	\Leftrightarrow	$X(f) e^{-i2\pi ft_0}$
$x(t) e^{+i2\pi f_0 t}$	\Leftrightarrow	$X(f - f_0)$
$x^*(t)$	\Leftrightarrow	$X^*(-f)$
$x(t) \cdot y(t)$	\Leftrightarrow	$X(f) * Y(f)$
$x(t) * y(t)$	\Leftrightarrow	$X(f) \cdot Y(f)$
$x(at)$	\Leftrightarrow	$\frac{1}{ a } X\left(\frac{f}{a}\right)$
$\frac{dx^{(n)}(t)}{dt^n}$	\Leftrightarrow	$(i2\pi f)^n X(f)$
$(-i2\pi t)^n x(t)$	\Leftrightarrow	$\frac{dX^{(n)}(f)}{df^n}$

Formule de Parseval
$\int_{\mathbb{R}} x(t) y^*(t) dt = \int_{\mathbb{R}} X(f) Y^*(f) df$
$\int_{\mathbb{R}} x(t) ^2 dt = \int_{\mathbb{R}} X(f) ^2 df$

Série de Fourier
$x(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{+i2\pi n f_0 t} \Leftrightarrow X(f) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n \delta(f - n f_0)$
avec $c_n = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) e^{-i2\pi n f_0 t} dt$

T.F.

1	\Leftrightarrow	$\delta(f)$
$\delta(t)$	\Leftrightarrow	1
$e^{+i2\pi f_0 t}$	\Leftrightarrow	$\delta(f - f_0)$
$\delta(t - t_0)$	\Leftrightarrow	$e^{-i2\pi ft_0}$
$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \delta(t - kT)$	\Leftrightarrow	$\frac{1}{T} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \delta\left(f - \frac{k}{T}\right)$
$\cos(2\pi f_0 t)$	\Leftrightarrow	$\frac{1}{2} [\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)]$
$\sin(2\pi f_0 t)$	\Leftrightarrow	$\frac{1}{2i} [\delta(f - f_0) - \delta(f + f_0)]$
$e^{-a t }$	\Leftrightarrow	$\frac{2a}{a^2 + 4\pi^2 f^2}$
$e^{-\pi t^2}$	\Leftrightarrow	$e^{-\pi f^2}$
$\Pi_T(t)$	\Leftrightarrow	$T \frac{\sin(\pi T f)}{\pi T f} = T \text{sinc}(\pi T f)$
$\Lambda_T(t)$	\Leftrightarrow	$T \text{sinc}^2(\pi T f)$
$B \text{sinc}(\pi B t)$	\Leftrightarrow	$\Pi_B(f)$
$B \text{sinc}^2(\pi B t)$	\Leftrightarrow	$\Lambda_B(f)$



!!!!!! Attention !!!!!

$\Pi_T(t)$ est de support égal à T .
 $\Lambda_T(t)$ est de support égal à $2T$
 et on a $\Pi_T(t) * \Pi_T(t) = T \Lambda_T(t)$

$$\delta(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \neq 0 \\ +\infty & \text{si } t = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \int_{\mathbb{R}} \delta(t) dt = 1$$

$$\delta(t - t_0) f(t) = \delta(t - t_0) f(t_0)$$

$$\delta(t - t_0) * f(t) = f(t - t_0)$$