
EXAMEN TRAITEMENT DU SIGNAL - 1TR

Mercredi 7 Janvier 2014 (8h-9h45)

Partiel sans document (Une feuille A4 recto-verso autorisée)

Exercice 1: Échantillonnage d'un signal périodique

On considère un signal déterministe périodique

$$x(t) = A \cos(2\pi f_0 t)$$

où A est une amplitude réelle positive et $f_0 = 5\text{kHz}$. On échantillonne ce signal à la fréquence $f_e = 1/T_e$ pour obtenir

$$x_e(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(kT_e)\delta(t - kT_e)$$

1. Déterminer les transformées de Fourier des signaux $x(t)$ et $x_e(t)$ notées $X(f)$ et $X_e(f)$ et montrer que $X_e(f)$ s'obtient par périodisation de $X(f)$.
2. Représenter graphiquement $X_e(f)$ lorsque $f_e = 100\text{kHz}$ et lorsque $f_e = 8\text{kHz}$.
3. On filtre le signal $x_e(t)$ à l'aide d'un filtre passe bas idéal de fréquence de coupure $f_c = f_e/2$ pour obtenir le signal $x_r(t) = x_e(t) * h(t)$ avec

$$H(f) = \text{TF}[h(t)] = \frac{1}{f_e} \Pi_{f_e}(f) = \begin{cases} \frac{1}{f_e} & \text{si } -\frac{f_e}{2} \leq f \leq \frac{f_e}{2} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

En s'aidant des résultats de la question précédente, déterminer l'expression du signal $x_r(t)$ dans les deux cas $f_e = 100\text{kHz}$ et $f_e = 8\text{kHz}$.

4. Qu'appelle-t-on formule d'interpolation de Shannon ?

Exercice 2: Détection d'un signal aléatoire

L'objectif de cet exercice est de détecter la présence d'un signal aléatoire $x(t)$ à partir de deux signaux $x_1(t)$ et $x_2(t)$ définis comme suit

$$x_1(t) = [x(t) + b_1(t)] * h_1(t) \quad \text{et} \quad x_2(t) = [x(t) + b_2(t)] * h_2(t)$$

où $b_1(t)$, $b_2(t)$ et $x(t)$ sont trois signaux aléatoires stationnaires indépendants deux à deux représentant respectivement le bruit associé au signal x_1 , le bruit associé au signal x_2 et le signal d'intérêt, et où $h_1(t)$ et $h_2(t)$ sont les réponses impulsionnelles de deux filtres linéaires (invariants dans le temps). On suppose également que les bruits $b_1(t)$ et $b_2(t)$ sont stationnaires de moyennes nulles, c'est-à-dire $E[b_1(t)] = E[b_2(t)] = 0$. Pour détecter la présence du signal $x(t)$, on propose de multiplier les deux signaux $x_1(t)$ et $x_2(t)$ pour former le signal $z(t) = x_1(t)x_2(t)$ et ensuite de filtrer $z(t)$ à l'aide d'un filtre moyenneur pour obtenir le signal $m(t)$ défini comme suit

$$m(t) = \frac{1}{T} \int_{t-T}^t z(u) du.$$

1. On commence par étudier l'opération de filtrage par moyennage qui transforme $z(t)$ en $m(t)$ et on suppose que $z(t)$ est un signal aléatoire stationnaire.

- Justifier que l'opération reliant $z(t)$ et $m(t)$ est une opération de filtrage linéaire.
- Déterminer la réponse impulsionnelle $h(t)$ et la transmittance $H(f)$ de ce filtre.
- Déterminer la moyenne de $m(t)$ en fonction de $m_z = E[z(t)]$.
- Déterminer la puissance du signal $m(t)$ sous la forme d'une intégrale d'une fonction dépendant de $s_z(f)$ et de T .

Pour étudier la moyenne et la puissance de $m(t)$, on a donc besoin de déterminer $E[z(t)]$ et $s_z(f)$, ce qui est l'objet de la prochaine question.

2. Pour commencer, on suppose que $x(t) = 0$ (absence de signal d'intérêt).

- Déterminer la moyenne du signal $z(t)$.
- Déterminer la fonction d'autocorrélation du signal $z(t)$ en fonction de celles de $x_1(t) = b_1(t) * h_1(t)$ et $x_2(t) = b_2(t) * h_2(t)$.
- En supposant que les bruits $b_1(t)$ et $b_2(t)$ sont des bruits blancs de densités spectrales de puissance $s_{b_1}(f) = N_1$ et $s_{b_2}(f) = N_2$, en déduire la densité spectrale de puissance $s_z(f)$ (sous forme intégrale) en fonction de $N_1, N_2, H_1(f)$ et $H_2(f)$. Que devient cette expression de $s_z(f)$ lorsque

$$H_1(f) = H_2(f) = \begin{cases} 1 & \text{si } -\frac{F}{2} \leq f \leq \frac{F}{2} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

avec $F > 0$.

3. Dans un second temps, on suppose que le signal d'intérêt est présent, c'est-à-dire que $x(t) \neq 0$.

- On suppose d'abord que $b_1(t) = b_2(t) = 0$ (absence de bruit). En utilisant un résultat du cours (à préciser), expliquer pourquoi la fonction d'intercorrélacion des signaux $x_1(t)$ et $x_2(t)$ (définis au début de cet exercice) s'écrit

$$R_{x_1 x_2}(\tau) = E[x_1(t)x_2^*(t - \tau)] = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j2\pi f\tau} H_1(f)H_2^*(f)s_x(f)df.$$

- Expliquer pourquoi ce résultat reste valable en présence de bruit, c'est-à-dire pour $b_1(t) \neq 0$ et $b_2(t) \neq 0$.
- En déduire la moyenne de $z(t)$ sous la forme d'une intégrale dépendant de $H_1(f), H_2(f)$ et $s_x(f)$. On suppose que $x(t)$ est un signal de puissance P_x de densité spectrale de puissance à bande limitée $[-F/2, F/2]$ et que les filtres $H_1(f)$ et $H_2(f)$ sont définis comme à la question précédente. Montrer alors que $E[z(t)] = P_x$.
- Déterminer la moyenne de $m(t)$ en présence (hypothèse H_1) et en l'absence (hypothèse H_0) du signal $x(t)$ et expliquer comment détecter la présence ou l'absence du signal $x(t)$ à l'aide de la sortie du filtre moyennneur $m(t)$.