
EXAMEN TRAITEMENT DU SIGNAL - 1SN

Mardi 15 Janvier 2019

Partiel sans document (Une feuille A4 recto-verso autorisée)

Exercice 1 : Analyse Spectrale (3 points)

On considère un signal $x(t)$ défini par

$$x(t) = \exp[j2\pi(A + Bt)]$$

où A et B sont deux constantes appartenant à l'intervalle $]0, 1[$.

1. Le signal $x(t)$ est-il à énergie finie ? à puissance finie périodique ? ou à puissance finie non-périodique ?
2. Calculer la fonction d'autocorrélation et la densité spectrale de puissance de $x(t)$.

Exercice 2 : Filtrage (3 points)

On considère un signal aléatoire $x(t)$ stationnaire de moyenne nulle et de densité spectrale de puissance $s_x(f)$ définie par

$$s_x(f) = \pi_F(f) = \begin{cases} 1 & \text{si } f \in]-\frac{F}{2}, \frac{F}{2}[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

et on construit le signal $y(t) = x(t) + ax(t - t_0)$, où a et t_0 sont deux constantes positives.

1. Montrer que $y(t)$ peut être obtenu par filtrage du signal $x(t)$ par un filtre dont déterminera la transmittance.
2. Déterminer la densité spectrale de puissance de $y(t)$.
3. Quelle est la puissance du signal $y(t)$?

Exercice 3 : Questions de Cours (4 points)

1. Comment calcule-t-on la puissance à partir de la densité spectrale de puissance d'un signal aléatoire stationnaire ?
2. L'opération qui au signal $x(t)$ associe le signal $y(t) = x(0)$ est-elle une opération de filtrage linéaire ? (justifier votre réponse)
3. Déterminer la transmittance du filtre associant au signal $x(t)$ sa dérivée seconde $y(t) = x''(t)$.
4. Que montre la formule des interférences lorsqu'un même signal est transmis dans deux canaux disjoints $H_1(f)$ et $H_2(f)$?
5. A quoi sert la formule d'interpolation de Shannon ?
6. On échantillonne le signal $x(t) = \cos(2\pi f_0 t)$ avec $f_0 = 5\text{Hz}$ à la fréquence $f_e = 6\text{Hz}$. Représenter la transformée de Fourier du signal échantillonné dans la bande de fréquence $[0, 16\text{Hz}]$.
7. Un filtre anti-repliement est-il analogique ou numérique (justifier) ?
8. Donner la démarche à suivre pour calculer la densité spectrale de puissance de $y(t) = g[x(t)]$, où g est une transformée non-linéaire et $x(t)$ un signal aléatoire stationnaire Gaussien de moyenne nulle.

Transformée de Fourier

$$X(f) = \int_{\mathbb{R}} x(t) e^{-i2\pi ft} dt \quad x(t) = \int_{\mathbb{R}} X(f) e^{i2\pi ft} df$$

T.F.

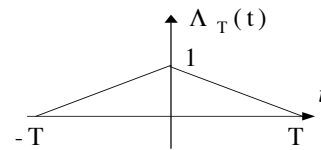
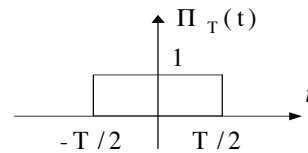
$x(t)$ réelle paire	\Leftrightarrow	$X(f)$ réelle paire
$x(t)$ réelle impaire	\Leftrightarrow	$X(f)$ imaginaire pure impaire
$x(t)$ réel	\Leftrightarrow	$\left\{ \begin{array}{l} \text{Re}\{X(f)\} \text{ paire} \\ \text{Im}\{X(f)\} \text{ impaire} \\ X(f) \text{ pair} \\ \arg\{X(f)\} \text{ impaire} \end{array} \right.$
$ax(t) + by(t)$	\Leftrightarrow	$aX(f) + bY(f)$
$x(t - t_0)$	\Leftrightarrow	$X(f) e^{-i2\pi ft_0}$
$x(t) e^{+i2\pi f_0 t}$	\Leftrightarrow	$X(f - f_0)$
$x^*(t)$	\Leftrightarrow	$X^*(-f)$
$x(t) \cdot y(t)$	\Leftrightarrow	$X(f) * Y(f)$
$x(t) * y(t)$	\Leftrightarrow	$X(f) \cdot Y(f)$
$x(at)$	\Leftrightarrow	$\frac{1}{ a } X\left(\frac{f}{a}\right)$
$\frac{dx^{(n)}(t)}{dt^n}$	\Leftrightarrow	$(i2\pi f)^n X(f)$
$(-i2\pi t)^n x(t)$	\Leftrightarrow	$\frac{dX^{(n)}(f)}{df^n}$

Formule de Parseval
$\int_{\mathbb{R}} x(t) y^*(t) dt = \int_{\mathbb{R}} X(f) Y^*(f) df$
$\int_{\mathbb{R}} x(t) ^2 dt = \int_{\mathbb{R}} X(f) ^2 df$

Série de Fourier
$x(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{+i2\pi n f_0 t} \Leftrightarrow X(f) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n \delta(f - n f_0)$
avec $c_n = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) e^{-i2\pi n f_0 t} dt$

T.F.

1	\Leftrightarrow	$\delta(f)$
$\delta(t)$	\Leftrightarrow	1
$e^{+i2\pi f_0 t}$	\Leftrightarrow	$\delta(f - f_0)$
$\delta(t - t_0)$	\Leftrightarrow	$e^{-i2\pi ft_0}$
$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \delta(t - kT)$	\Leftrightarrow	$\frac{1}{T} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \delta\left(f - \frac{k}{T}\right)$
$\cos(2\pi f_0 t)$	\Leftrightarrow	$\frac{1}{2} [\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)]$
$\sin(2\pi f_0 t)$	\Leftrightarrow	$\frac{1}{2i} [\delta(f - f_0) - \delta(f + f_0)]$
$e^{-a t }$	\Leftrightarrow	$\frac{2a}{a^2 + 4\pi^2 f^2}$
$e^{-\pi t^2}$	\Leftrightarrow	$e^{-\pi f^2}$
$\Pi_T(t)$	\Leftrightarrow	$T \frac{\sin(\pi T f)}{\pi T f} = T \text{sinc}(\pi T f)$
$\Lambda_T(t)$	\Leftrightarrow	$T \text{sinc}^2(\pi T f)$
$B \text{sinc}(\pi B t)$	\Leftrightarrow	$\Pi_B(f)$
$B \text{sinc}^2(\pi B t)$	\Leftrightarrow	$\Lambda_B(f)$



!!!!!! Attention !!!!

$\Pi_T(t)$ est de support égal à T .
 $\Lambda_T(t)$ est de support égal à $2T$
 et on a $\Pi_T(t) * \Pi_T(t) = T \Lambda_T(t)$

$$\delta(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \neq 0 \\ +\infty & \text{si } t = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \int_{\mathbb{R}} \delta(t) dt = 1$$

$$\delta(t - t_0) f(t) = \delta(t - t_0) f(t_0)$$

$$\delta(t - t_0) * f(t) = f(t - t_0)$$