Chapitre 3 : FILTRAGE NON LINÉAIRE

① Filtrage Non Linéaire sans mémoire

Un tel système est caractérisé par une relation instantanée entre l'entrée $x(t)$ et la sortie $y(t) = g[x(t)]$ - Parmi ceux-ci, les plus fréquents sont les quadrateurs, les redresseurs double ou simple alternance et les limiteurs durs.

A l'aide du quadrateur, nous allons montrer qu'un système non linéaire fait surgir des composantes spectrales totalement absentes du signal d'entrée

② Le quadrateur

signaux déterministes

L'analyse du quadrateur est relativement simple puisque $y(t) = x^2(t)$ se transforme en $Y(f) = X(f) * X(f)$

- Par exemple, si $x(t) = A\cos(2\pi f_0 t)$ on a $Y(f) = \frac{A}{2}[\delta(f-f_0) + \delta(f+f_0)] * \frac{A}{2}[\ ]$

  d'où $Y(f) = \frac{A^2}{2}\delta(f) + \frac{A^2}{4}\delta(f-2f_0) + \frac{A^2}{4}\delta(f+2f_0)$

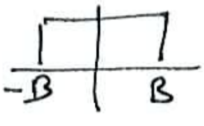
  d'où disparition de la fréquence f_0 et apparition des fréquences $2f_0$, et 0

- Si $x(t) = A_1\cos(2\pi f_1 t) + A_2\cos(2\pi f_2 t)$ alors

$$Y(f) = \left(\frac{A_1^2 + A_2^2}{2}\right)\delta(f) + \frac{A_1^2}{4}[\delta(f-2f_1) + \delta(f+2f_1)] + \frac{A_2^2}{4}[\delta(f-2f_2) + \delta(f+2f_2)]$$

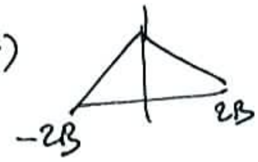
$$+ \underbrace{\frac{A_1A_2}{2}[\delta(f-f_1-f_2) + \delta(f+f_1+f_2) + \delta(f-f_1+f_2) + \delta(f+f_1-f_2)]}_{\text{termes d'intermodulation}}$$

- si $x(t) = 2AB\,\mathrm{sinc}(2Bt\pi)$ alors $X(f) = A\,\Pi_{2B}(f)$



$T\,\mathrm{sinc}(\pi T f) \rightleftarrows \Pi_T(t)$ $\quad B\,\mathrm{sinc}(\pi B t) \rightleftarrows \Pi_B(f)$

$y(t) = x^2(t) = a^2(2B)^2\,\mathrm{sinc}^2(2\pi Bt)$ d'où $Y(f) = A^2\,2B\,\Lambda_{2B}(f)$



$T\,\mathrm{sinc}^2(\pi T f) \rightleftarrows \Lambda_T(t)$ $\quad B\,\mathrm{sinc}^2(\pi Bt) \rightleftarrows \Lambda_B(f)$

d'où doublement de la largeur de bande

Signaux Aléatoires

Montrer tout d'abord que $Y(t)=f(X(t))$ est un pa stationnaire dont la fonction d'autocorrélation dépend uniquement de $R_X(\tau)$ et de σ^2

L'outil permettant de déterminer la DSP de $Y(t)=X^2(t)$ est le théorème de PRICE dont la forme la ⊕ simple est la suivante

$$\boxed{\begin{array}{l} X_1, X_2 \text{ pa stationnaires centrés Gaussiens} \\ Y_1 = f(X_1),\ Y_2 = f(X_2) \\ \dfrac{\partial E[Y_1 Y_2]}{\partial E[X_1 X_2]} = E\left[\dfrac{dY_1}{dX_1}\dfrac{dY_2}{dX_2}\right] \end{array}}$$

$\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}$ vecteur Gaussien centré

autre formulation

on pose alors $X_1 = X(t)$, $X_2 = X(t-\tau)$, $Y_1 = X^2(t)$, $Y_2 = X^2(t-\tau)$

d'où $\dfrac{\partial E[Y(t)Y(t-\tau)]}{\partial E[X(t)X(t-\tau)]} = E\left[2X(t)\,2X(t-\tau)\right]$

$\partial K_Y(\tau) = 4\, K_X(\tau)\, \partial K_X(\tau)$ → Rq : $R_Y(\tau)$ est une fonction de $R_X(\tau)$ et de $R_X(0)$.

d'où $\boxed{K_Y(\tau) = 2K_X^2(\tau) + K}$

Détermination de la constante

• $\boxed{\tau=0}$ $K_Y(0) = E[X^2(t)X^2(t)] = E[X^4(t)] = \displaystyle\int x^4 \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right)dx$ avec $\sigma^2 \triangleq K_X(0)$

d'où $\boxed{K_Y(0) = 3\sigma^4}$ mais $K + 2\sigma^4 = 3\sigma^4 \Rightarrow \boxed{K = \sigma^4}$

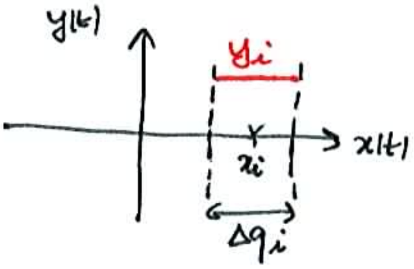
d'où finalement $\boxed{K_Y(\tau) = 2K_X^2(\tau) + K_X^2(0)}$

• $\boxed{\tau \to +\infty}$ $E[Y(t)Y(t-\tau)] = E[X^2(t)X^2(t-\tau)] \simeq K_X(0)K_X(0)$ ($X(t)$ et $X(t-\tau)$ tendent à être indépendants)

$K_X(\tau) \to 0$ cqFD

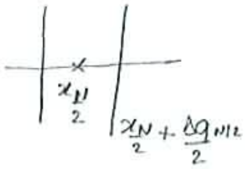
③ Le quantificateur

$\boxed{\text{Principe}}$ si $x_i - \dfrac{\Delta q_i}{2} \le x(t) \le x_i + \dfrac{\Delta q_i}{2}$ alors $y(t) = y_i$ (E)



la relation liant $x(t)$ et $y(t)$ est une fonction non linéaire, constante par morceaux (c'est une fonction en escaliers)

En général il y a un phénomène d'écrêtage i.e (E) est valable pour $i \in \{-\frac{N}{2}, \dots, 0, \dots, \frac{N}{2}\}$



$y(t) = y_{\frac{N}{2}+1}$ si $x(t) \ge x_{\frac{N}{2}} + \dfrac{\Delta q_{N/2}}{2}$

$y(t) = y_{-\frac{N}{2}-1}$ si $x(t) \le x_{-\frac{N}{2}} - \dfrac{\Delta q_{-N/2}}{2}$

$$X(t) \longrightarrow \boxed{\quad f \quad} \longrightarrow Y(t) = f(X(t))$$

- $$E[Y(t)Y^*(t-\tau)] = E[f(X(t))\, f(X(t-\tau))]$$
$$= \iint f(X(t))\, f[X(t-\tau)]\; p[X(t), X(t-\tau)]\; dX(t)\, dX(t-\tau)$$
$$= \iint f(u)\, f(v)\, p(u,v)\, du\, dv$$

$$p[X(t), X(t-\tau)] = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}\sqrt{\det \Sigma}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left[X(t), X(t-\tau)\right]\Sigma^{-1}\begin{bmatrix} X(t) \\ X(t-\tau)\end{bmatrix}\right\}$$

$$\Sigma = \begin{bmatrix} E[X^2(t)] = P_x & E[X(t)X(t-\tau)] = R_X(\tau) \\ R_X(\tau) & P_x \end{bmatrix}$$

donc Σ ne dépend pas de t $\Rightarrow$ $\boxed{E[Y(t)Y(t-\tau)] \text{ ne dépend pas de } t}$

$\boxed{E[Y(t)Y(t-\tau)] \text{ dépend de } R_X(\tau) \text{ et de } R_X(0)}$

- $$E[Y(t)] = E[f(X(t))] = \int f(u)\, p(u)\, du$$

où $p(u)$ est la densité marginale de $X(t)$, i.e. $\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left[-\frac{(u-m)^2}{2\sigma^2}\right]$

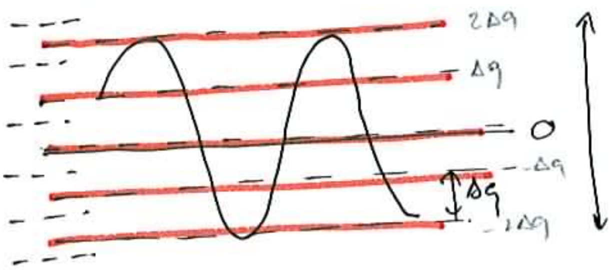
Puisque $X(t)$ est un signal stationnaire $\quad m = E[X(t)]$ ind de t

$\sigma^2 = E[X^2(t)] - E(X(t))$

$= R_X(0) - m$ ind de t CQFD

Deux Types de quantification

Type A : nombre impair de niveaux $N+1$ avec $N = 2^n$, n nombre de bits



$2A = N\Delta q$

si $x(t) \in \left[-\frac{\Delta q}{2}, \frac{\Delta q}{2}\right]$ alors $x(t) = 0$

si $x(t) \in \left[\frac{\Delta q}{2}, \frac{3\Delta q}{2}\right]$ alors $x(t) = \Delta q$

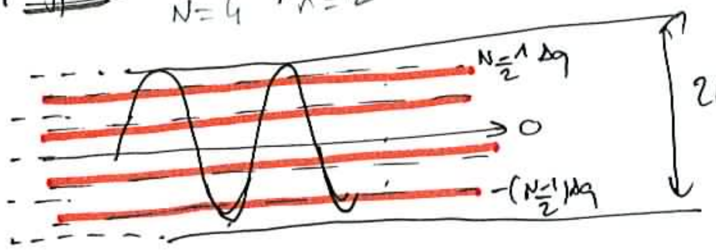
etc...

$N = 5$

$n = 2$

Type B : nombre pair de niveaux symétriques / 0 $\quad N = 2^n$

$N = 4 \quad n = 2$



$2A = N\Delta q$ d'où $\Delta q = \frac{2A}{N} = \frac{2A}{2^n}$

Dans tous les cas, on a $\Delta q = \frac{2A}{N}$ avec

Type A $\quad N$: nombre d'intervalles = nbre de niveaux -1

Type B $\quad N$: nombre d'intervalles = nbre de niveaux

Rq Type B si $x(t) \in \left[\frac{N-1}{2}\Delta q - \frac{\Delta q}{2}, \frac{N-1}{2}\Delta q + \frac{\Delta q}{2}\right]$ alors $x_Q(t) = \frac{N-1}{2}\Delta q$

$\left[\frac{N-2}{2}\Delta q, \frac{N}{2}\Delta q\right]$

Type A si $x(t) \in \left[\frac{N}{2}\Delta q - \frac{\Delta q}{2}, \frac{N}{2}\Delta q + \frac{\Delta q}{2}\right]$ alors $x_Q(t) = \frac{N\Delta q}{2}$

$\left[\frac{N-1}{2}\Delta q, \frac{N+1}{2}\Delta q\right]$

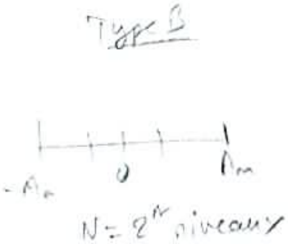
Si le signal d'entrée $x(t)$ est borné, alors on s'arrange pour avoir

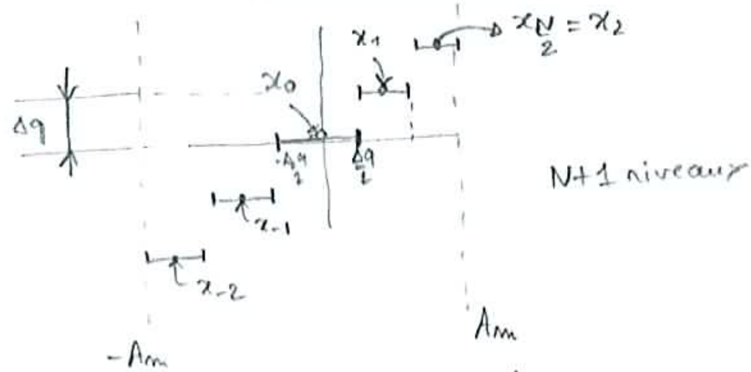
$$\sum_{i=-\frac{N}{2}}^{N/2} \Delta q_i = 2A_m \quad \text{si} \quad -A_m \leq x(t) \leq +A_m$$

Quantification uniforme

On parle de quantification uniforme lorsque $\Delta q_i = \Delta q \quad \forall i$

On a alors $(N+\cancel{1})\Delta q = 2A_m$ d'où $\boxed{\Delta q = \frac{2A_m}{N+\cancel{1}}}$



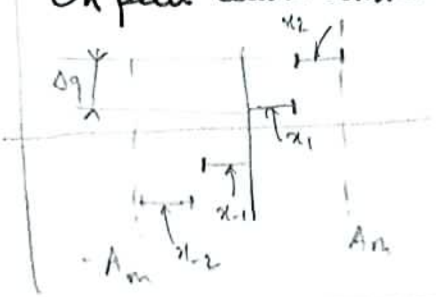


$N=4$ d'où $5\Delta q = 2A_m$

On parle de quantification de type A

Le nombre minimum de niveaux est $\underset{N+1}{3}$ $(N=2)$

On peut aussi considérer une quantification uniforme de type B



le nombre minimum de niveaux est $2 = N$

alors $N\Delta q = 2A_m$ d'où $\boxed{\Delta q = \frac{2A_m}{N}}$

Type B : nombre pair de niveaux

On dit que Δq est le <u>pas de quantification</u>. Pour passer de la quantification de type B à la quantification de type A, on change N en $N+1$. Dans la suite pour simplifier, on pose

$$\underset{= x_i}{y_i = i\,\Delta q} \quad \text{pour} \quad x_i - \frac{\Delta q}{2} \leq x(t) \leq x_i + \frac{\Delta q}{2} \qquad i = -\frac{N}{2}, \dots, -1, 0, +1, \dots, \frac{N}{2}$$

ce qui correspond à la quantification de type A

Erreur de Quantification

$$x(t) \longrightarrow \boxed{\text{Quantificateur}} \longrightarrow y(t)$$

On suppose que $x(t)$ est un pa stationnaire et on se place à un instant t

d'où les notations $x(t) \to X$ et $y(t) \to Y \in \{y_i,\ i = -\frac{N}{2}, \dots, \frac{N}{2}\}$

Soit $\varepsilon = X - Y$ l'erreur de quantification. On montre que sous des hypothèses relativement faibles, la loi de ε peut être approchée par une loi uniforme sur $\left[-\frac{\Delta q}{2}, \frac{\Delta q}{2}\right]$. On a alors

Δq faible i.e. SNR ≥ 10 dB ($\simeq N = 2^{3}, 2^{4}, 2^{8}, 2^{9} \dots$)

$$E[\varepsilon] \approx 0$$

$$\sigma_\varepsilon^2 = E[\varepsilon^2] \approx \frac{\Delta q^2}{12}$$

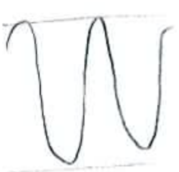
On définit alors le rapport signal sur bruit du quantifieur par

$$SNR = 10 \log\left(\frac{\sigma_x^2}{\sigma_\varepsilon^2}\right)$$

On vient de montrer $\boxed{\sigma_\varepsilon^2 \approx \frac{\Delta q^2}{12}}$

Ex1

Sinus $\quad \sigma_x^2 = \frac{A^2}{2} \Rightarrow SNR = 10 \log\left(\frac{A^2}{2} \frac{12}{\Delta q^2}\right) \qquad \boxed{\Delta q = \frac{2A}{N}}$



$$= 10 \log\left(\frac{3\cancel{A^2}}{\cancel{2}} \frac{N^2}{\cancel{A^2}}\right)$$

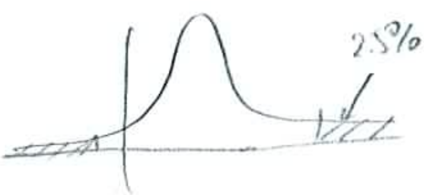
$$= 10 \log\left(\frac{3}{2}\right) + 10 \log\left(2^{2n}\right) \qquad N = 2^n, \text{ n nombre de bits}$$

$$= \underbrace{10 \log\left(\frac{3}{2}\right)}_{\simeq 1.76} + \underbrace{20 n \log 2}_{\simeq 6n} \simeq \boxed{6n + 1.76}$$

Ex2 Signal Gaussien $X \sim N(m, \sigma^2)$ m et σ^2 connus. On se fixe une probabilité d'écrêtage

par ex $P[\text{écrêtage}] = 5\%$

$$P\left[\left|\frac{X-m}{\sigma}\right| < S\right] = 95\%$$



Tables $\Rightarrow S$

$$\left|\frac{X-m}{\sigma}\right| < S \Leftrightarrow m - S\sigma < X < m + S\sigma$$

d'où $N\Delta q = 2S\sigma \Leftrightarrow 2^n \Delta q = 2S\sigma \Rightarrow \boxed{\Delta q = \frac{S\sigma}{2^{n-1}}} \Rightarrow \sigma_\varepsilon^2 = \frac{\Delta q^2}{12} = \frac{S^2\sigma^2}{12\, 2^{2n-2}}$

$$\frac{\sigma_x^2}{\sigma_\varepsilon^2} = \frac{12\,\cancel{\sigma^2}}{S^2\,\cancel{\sigma^2}}\, 2^{2n-2} \quad \text{d'où} \quad SNR = 10\log\left(\frac{\sigma_x^2}{\sigma_\varepsilon^2}\right)$$

$$= 10\log\left(\frac{3}{S^2}\right) + 20\log 2\; n$$

$$\simeq \boxed{6n + 10\log\left(\frac{3}{S^2}\right)}$$

Rq $\sigma_x^2 = E[x^2] = \sigma^2$ car $E[X]=0$
puissance du signal $\mathrm{Var}\,X = \sigma^2$

De manière plus générale, on a toujours

$$\Delta q N = D \implies \Delta q = \frac{D}{2^n}$$

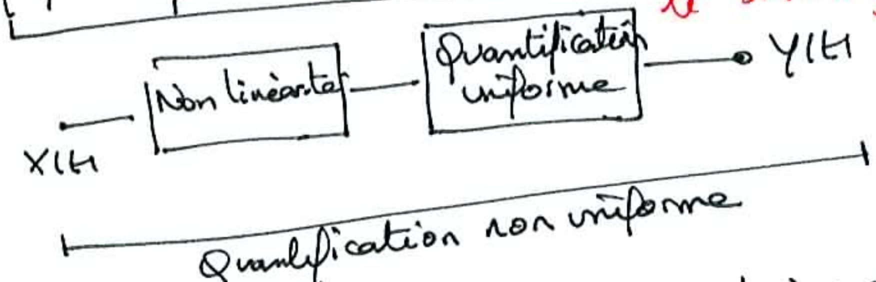
"dynamique" du signal

$$SNR = 10\log\left(\frac{\sigma_x^2}{D^2}\,\frac{2^{2n}}{12}\right) = 10\log\left(\frac{\sigma_x^2}{12\,D^2}\right) + 20\log 2\; n$$

$$= \boxed{6n + \dots}$$

Rq : quand on ajoute un bit, $n \to n+1$, on double le nombre de niveaux et le SNR augmente de 6 dB

Quantification Non Uniforme



Cette quantification permet dans certains cas d'améliorer le rapport signal à bruit, ~~et qui~~ On peut construire le quantificateur optimal adapté à la statistique du signal (MAX-LLYOD) – En parole, par exemple le quantificateur logarithmique. (la statistique de la parole retenu sur ~~logarithm~~ logarithmique suit une loi de Laplace ).

Beaucoup de valeurs autour de l'origine
et le quantificateur logarithmique a plein de valeurs autour de l'origine par rapport aux valeurs extrêmes

davidfernandez1@free.fr.
yedorgeix@free.fr