Corrections de l'examen de traitement du signal du 24 janvier 2011

Exercice 1 : **Estimation d'un temps de retard**

1)

- La fonction d'intercorrélation entre les signaux à énergie finie $x_1(t)$ et $x_2(t)$ est définie par

$$\begin{aligned} R_{x_1x_2}(\tau) &= \int x_1(t)x_2^*(t-\tau)dt \\ &= A_1A_2 \int x(t-T_1)x^*(t-\tau-T_2)dt \\ &= A_1A_2R_x(\tau-T) \end{aligned}$$

  Puisque la fonction d'autocorrélation $R_x(\tau)$ est maximale à l'origine $\tau = 0$, le maximum de $R_{x_1x_2}(\tau)$ est atteint en $\tau = T$. On en déduit

$$T = \arg \max_{\tau} R_{x_1x_2}(\tau)$$

  Pour déterminer T, il suffit de chercher la valeur de τ qui maximise la fonction d'intercorrélation $R_{x_1x_2}(\tau)$.

- En utilisant l'égalité de Parseval, on obtient

$$\begin{aligned} R_{x_1x_2}(\tau) &= \int x_1(t)x_2^*(t-\tau)dt \\ &= \int X_1(f)\left[e^{-j2\pi f\tau}X_2(f)\right]^* df \\ &= \int X_1(f)X_2^*(f)e^{j2\pi f\tau}df \\ &= TF^{-1}\left[X_1(f)X_2^*(f)\right] \end{aligned}$$

  Lorsque $x(t) = \Pi_a(t)$, on a

$$\begin{aligned} X_1(f) &= A_1e^{-j2\pi fT_1}X(f) = aA_1e^{-j2\pi fT_1}\frac{\sin(\pi af)}{\pi af} \\ X_2(f) &= A_2e^{-j2\pi fT_2}X(f) = aA_2e^{-j2\pi fT_2}\frac{\sin(\pi af)}{\pi af} \end{aligned}$$

  d'où

$$\begin{aligned} R_{x_1x_2}(\tau) &= TF^{-1}\left[X_1(f)X_2^*(f)\right] \\ &= aA_1A_2TF^{-1}\left\{e^{-j2\pi fT}a\left[\frac{\sin(\pi af)}{\pi af}\right]^2\right\} \\ &= aA_1A_2\delta(\tau-T)*\Lambda_a(\tau) \\ &= aA_1A_2\Lambda_a(\tau-T) \end{aligned}$$

  qui est bien une fonction maximale en $\tau = T$.

- On a

$$\begin{aligned}
G(\tau) &= TF^{-1}\left[\frac{X_1(f)X_2^*(f)}{|X_1(f)|\,|X_2(f)|}\right] \\
&= TF^{-1}\left[\frac{A_1 e^{-j2\pi f T_1} X(f) A_2 e^{j2\pi f T_2} X^*(f)}{A_1\,|X(f)|\,A_2\,|X(f)|}\right] \\
&= TF^{-1}\left[e^{-j2\pi f T}\right] = \delta(\tau - T)
\end{aligned}$$

On voit donc que même en présence de bruit la fonction G devrait présenter un pic en $\tau = T$.

2) Pour un signal périodique de période T_0, on a

$$\begin{aligned}
R_{x_1x_2}(\tau) &= \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} x_1(t)x_2^*(t-\tau)dt \\
&= A_1A_2\frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t-T_1)x^*(t-\tau-T_2)dt \\
&= A_1A_2R_x(\tau - T)
\end{aligned}$$

La fonction d'intercorrélation est une fonction périodique de période T_0 comme $R_x(\tau)$ donc en recherchant les maxima de $R_{x_1x_2}(\tau)$, on aura une estimation de T à un multiple de T_0 près.Dans le cas où $x(t) = \cos(2\pi f_0 t)$, on a vu en cours

$$R_x(\tau) = \frac{1}{2}\cos(2\pi f_0 \tau)$$

d'où

$$R_{x_1x_2}(\tau) = \frac{A_1A_2}{2}\cos\left[2\pi f_0\left(\tau - T\right)\right]$$

On voit que dans ce cas que l'intercorrélation possède plusieurs maxima et minima aux points

$$\tau = T + kT_0, k \in \mathbb{Z} \text{ et } \tau = T + k\frac{T_0}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

On pourra donc estimer T à un multiple de T_0 près.
3) Lorsque le signal source est un signal aléatoire stationnaire, on a

$$\begin{aligned}
R_{x_1x_2}(\tau) &= E\left[x_1(t)x_2^*(t-\tau)\right] \\
&= A_1A_2E\left[x(t-T_1)x^*(t-\tau-T_2)\right] \\
&= A_1A_2R_x(\tau - T)
\end{aligned}$$

À nouveau, on peut estimer T en recherchant le maximum de $R_{x_1x_2}(\tau)$. Par contre, on ne peut pas utiliser la fonction $G(\tau)$ car les transformées de Fourier $X_1(f)$ et $X_2(f)$ n'existent pas ($x_1(t)$ et $x_2(t)$ sont des signaux aléatoires stationnaires).

Exercice 2

1) En utilisant la relation $x(t)=i(t)+B(t)$, on a

$$\begin{aligned} E\left[x(t)x^*(t-\tau)\right] &= E\left[i(t)i^*(t-\tau)\right]+E\left[i(t)B^*(t-\tau)\right]+E\left[B(t)i^*(t-\tau)\right]+E\left[B(t)B^*(t-\tau)\right] \\ &= R_i(\tau)+E\left[i(t)B^*(t-\tau)\right]+E\left[B(t)i^*(t-\tau)\right]+R_B(\tau) \end{aligned}$$

Puisque les signaux $i(t)$ et $B(t)$ sont indépendants et de moyennes nulles, on en déduit

$$R_x(\tau)=R_i(\tau)+R_B(\tau)$$

et donc

$$s_x(f)=s_i(f)+s_B(f) \tag{1}$$

Les équations normales s'écrivent

$$E\left\{\left[i(t)-Y(t)\right]X^*(u)\right\}=0, \qquad \forall u\in\mathbb{R}$$

c'est-à-dire

$$E\left[i(t)X^*(u)\right]=E\left[Y(t)X^*(u)\right], \qquad \forall u\in\mathbb{R} \tag{2}$$

En utilisant à nouveau l'indépendance entre $i(t)$ et $B(t)$, le terme de gauche de cette équation s'écrit

$$\begin{aligned} E\left[i(t)X^*(u)\right] &= E\left[i(t)i^*(u)\right]+E\left[i(t)B^*(u)\right] \\ &= R_i(t-u)+E\left[i(t)\right]E\left[B^*(u)\right] \\ &= R_i(t-u) \end{aligned}$$

Le terme de droite de (2) s'écrit

$$\begin{aligned} E\left[Y(t)X^*(u)\right] &= E\left\{\left[\int h(v)X(t-v)dv\right]X^*(u)\right\} \\ &= \int h(v)E\left[X(t-v)X^*(u)\right]dv \\ &= \int h(v)R_x(t-v-u)dv \end{aligned}$$

On en déduit

$$R_i(t-u)=\int h(x)R_x\left(t-u-x\right)dx, \qquad \forall u\in\mathbb{R}$$

et puisque ce résultat est valable $\forall u\in\mathbb{R}$

$$\begin{aligned} R_i(\tau) &= \int h(x)R_x\left(\tau-x\right)dx, \qquad \forall \tau\in\mathbb{R} \\ &= h(\tau)*R_x(\tau) \end{aligned}$$

En prenant la transformée de Fourier de cette équation, on obtient finalement

$$s_i(f)=H(f)s_x(f)$$

c'est-à-dire à partir de (1)

$$H(f) = \frac{s_i(f)}{s_i(f) + s_B(f)} \tag{3}$$

2) La transmittance associée à la réponse impulsionnelle

$$\pi_a(t) = \begin{cases} e^{-at}, & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

est

$$\begin{aligned} \mathrm{TF}\left[\pi_a(t)\right] &= \int_0^\infty e^{-at} e^{-j2\pi f t} dt \\ &= \left[\frac{e^{-(a+j2\pi f t)}}{-(a+j2\pi f t)}\right]_0^\infty \\ &= \frac{1}{a+j2\pi f} \end{aligned}$$

En utilisant la relation de Wiener-Lee et le fait que $i(t)$ est obtenu par le filtrage de $e(t)$ par un filtre de réponse impulsionnelle $\pi_a(t)$, on obtient

$$s_i(f) = \frac{s_e(f)}{a^2 + 4\pi^2 f^2} = \frac{1}{a^2 + 4\pi^2 f^2}$$

On en déduit

$$\begin{aligned} H(f) &= \frac{s_i(f)}{s_i(f) + s_B(f)} \\ &= \frac{\frac{1}{a^2+4\pi^2 f^2}}{\frac{1}{a^2+4\pi^2 f^2} + \sigma_b^2} \\ &= \frac{1}{1 + \sigma_b^2\left(a^2 + 4\pi^2 f^2\right)} \end{aligned} \tag{4}$$

La réponse impulsionnelle du filtre de Wiener est la transformée de Fourier inverse de $H(f)$

$$\begin{aligned} h(t) &= \mathrm{TF}^{-1}\left[\frac{1}{1 + a^2\sigma_b^2 + 4\pi^2\sigma_b^2 f^2}\right] \\ &= \frac{1}{\sigma_b^2}\mathrm{TF}^{-1}\left[\frac{1}{\frac{1}{\sigma_b^2} + a^2 + 4\pi^2 f^2}\right] \end{aligned}$$

En posant

$$\omega^2 = \frac{1}{\sigma_b^2} + a^2$$

on obtient

$$\begin{aligned} h(t) &= \frac{1}{2\omega\sigma_b^2}\mathrm{TF}^{-1}\left[\frac{2\omega}{\omega^2 + 4\pi^2 f^2}\right] \\ &= \frac{1}{2\omega\sigma_b^2} e^{-\omega|t|} \end{aligned}$$

3) Lorsque $\sigma_b^2 \to 0$, on observe d'après (4)

$$\lim_{\sigma_b^2 \to 0} H(f) = 1$$

d'où

$$h(t) = \delta(t)$$

Interprétation : dans le cas où $\sigma_b^2 \to 0$ il n'y a pas de bruit additif $B(t)$. Donc, on observe $X(t) = i(t) + B(t) = i(t)$ et on cherche le filtre qui permet de retrouver $i(t)$ à partir de $X(t) = i(t)$. Ce filtre est de réponse impulsionnelle $h(t) = \delta(t)$ car

$$i(t) * \delta(t) = i(t).$$

Exercice 3

1) On a très aisément

$$\begin{aligned}
\operatorname{var}(U) &= E\left[X^2(t)\right] = R_X(0) \\
\operatorname{var}(V) &= E\left[X^2(t-\tau)\right] = R_X(0) \\
\operatorname{cov}(U,V) &= E\left[X(t)X(t-\tau)\right] = R_X(\tau)
\end{aligned}$$

donc la loi de (U,V) ne dépend que de $R_X(\tau)$ et de $R_X(0)$, donc

$$\begin{aligned}
R_Y(\tau) &= E\left[Y(t)Y(t-\tau)\right] \\
&= E\left\{G\left[X(t)\right]G\left[X(t-\tau)\right]\right\} \\
&= \int\int E\left[G\left(u\right)G\left(v\right)\right]p(u,v)dudv
\end{aligned}$$

Puisque la densité de (U,V) ne dépend que de $R_X(\tau)$ et de $R_X(0)$, il en est de même pour $R_Y(\tau)$.

2) Le théorème de Price s'écrit

$$\begin{aligned}
\frac{\partial E\left[Y(t)Y(t-\tau)\right]}{\partial E\left[X(t)X(t-\tau)\right]} &= E\left[\frac{\partial Y(t)}{\partial X(t)}\frac{\partial Y(t-\tau)}{\partial X(t-\tau)}\right] \\
&= E\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\frac{X^2(t)}{2}\right]\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\frac{X^2(t-\tau)}{2}\right]\right\} \\
&= \frac{1}{2\pi}E\left\{\exp\left[-\frac{X^2(t)+X^2(t-\tau)}{2}\right]\right\}
\end{aligned}$$

En utilisant le résultat donné dans l'énoncé, on obtient

$$\frac{\partial R_Y(\tau)}{\partial R_X(\tau)} = F\left[R_X(\tau)\right] = \frac{1}{2\pi}\frac{1}{\sqrt{\left(1-R_X(0)\right)^2 - R_X^2(\tau)}}$$

d'où

$$R_Y(\tau) = \frac{1}{2\pi}\arcsin\left(\frac{R_X(\tau)}{|1-R_X(0)|}\right) + C.$$