Corrections de l'examen de traitement du signal (signaux aléatoires) du mercredi 21 novembre 2012.

Exercice 1 : **Zoom spectral pour signaux déterministes**

Enoncé

1) On considère un signal déterministe à énergie finie à valeurs réelles noté $x(t)$ de transformée de Fourier

$$X(f) = A\left[\Lambda_F(f - f_0) + \Lambda_F(f + f_0)\right]$$

avec

$$\Lambda_F(f) = \begin{cases} 1 - \frac{|f|}{F} \text{ si } |f| < F \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

et $f_0 > F > 0$ (on notera que $X(f)$ est une fonction paire).

1) On forme le signal

$$x_1(t) = x(t)\exp\left[-i2\pi f_0 t\right]$$

Déterminer la transformée de Fourier de $x_1(t)$ notée $X_1(f)$.

2) On filtre le signal $x_1(t)$ à l'aide d'un filtre passe-bas idéal de façon à ne conserver que la partie du spectre de $x_1(t)$ associée aux fréquences vérifiant $|f| < F$. Déterminer le signal résultant noté $x_2(t)$.

3) Le signal $x_2(t)$ est comprimé de manière à obtenir

$$x_3(t) = x_2(Mt) \text{ avec } M > 1.$$

Expliquer pourquoi l'opération qui fait passer de $x_2(t)$ à $x_3(t)$ peut être qualifiée de "compression". Déterminer la transformée de Fourier de $x_3(t)$ notée $X_3(f)$.

4) Pour terminer, on module le signal $x_3(t)$ de manière à générer

$$x_4(t) = x_3(t)\exp\left[i2\pi f_0 t\right]$$

Déterminer la transformée de Fourier de $x_4(t)$ notée $X_4(f)$.

5) Représenter graphiquement $X_1(f), X_2(f), X_3(f)$ et $X_4(f)$ (pour toutes ces représentations graphiques, on prendra $f_0 = 5$kHz et $F = 1$kHz) et expliquer pourquoi l'opération qui transforme le signal $x(t)$ en $x_4(t)$ peut être qualifiée de "zoom" spectral.

Réponses

1) La transformée de Fourier de $x_1(t)$ s'écrit

$$\begin{aligned} X_1(f) &= X(f) * \delta(f + f_0) \\ &= X(f + f_0) \\ &= A\left[\Lambda_F(f) + \Lambda_F(f + 2f_0)\right]. \end{aligned}$$

2) Si on ne conserve que les fréquences appartenant à l'intervalle $[-F, +F]$, on obtient

$$X_2(f) = A\Lambda_F(f).$$

Le signal filtré $x_2(t)$ s'écrit donc

$$x_2(t) = TF^{-1}\left[X_2(f)\right] = AF \sin\mathrm{c}^2\left(\pi F t\right)$$

avec

$$\sin\mathrm{c}\,(x) = \frac{\sin x}{x}.$$

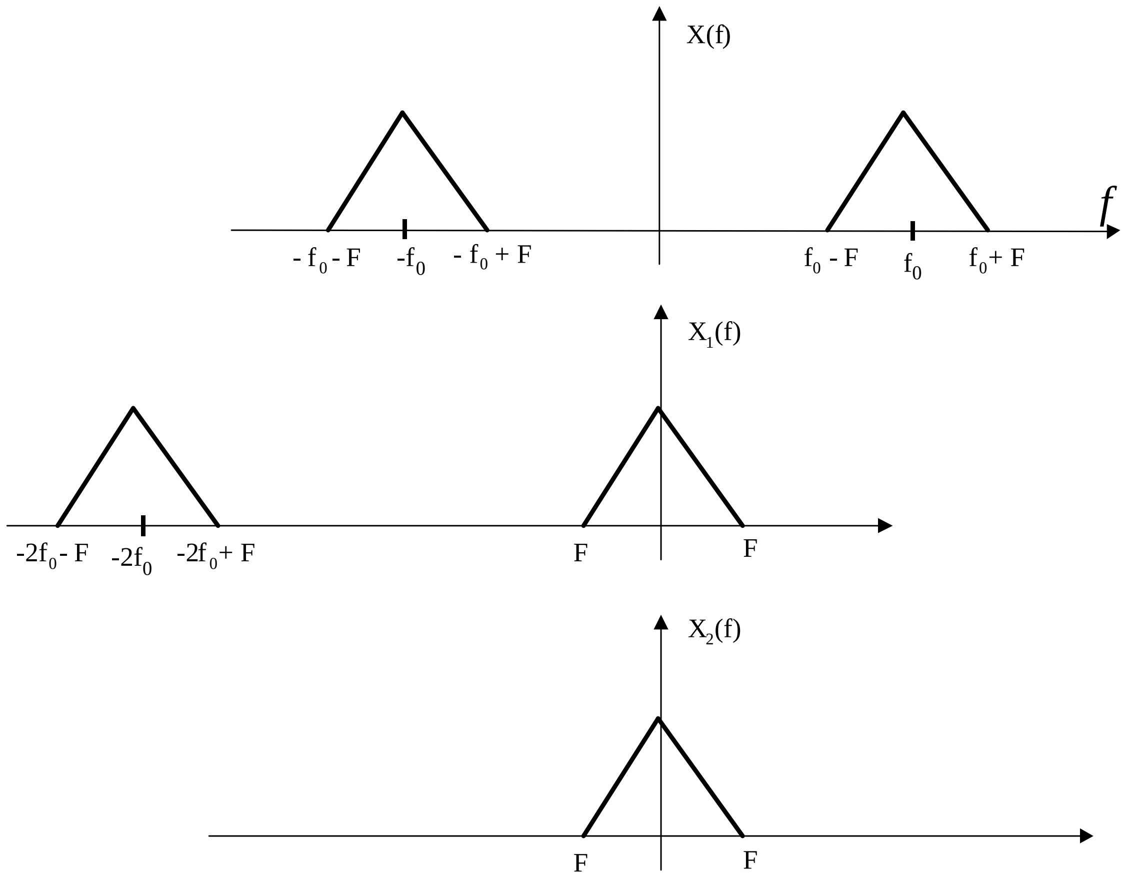
3) Si le support temporel de $x_2(t)$ est $[-A, A]$, celui de $x_3(t)$ est $[-A/M, A/M]$; De plus, l'allure temporelle des signaux $x_2(t)$ et $x_3(t)$ sont similaires. Le signal $x_3(t)$ est donc bien obtenu par compression du signal $x_2(t)$ La transformée de Fourier de $x_3(t)$ s'écrit

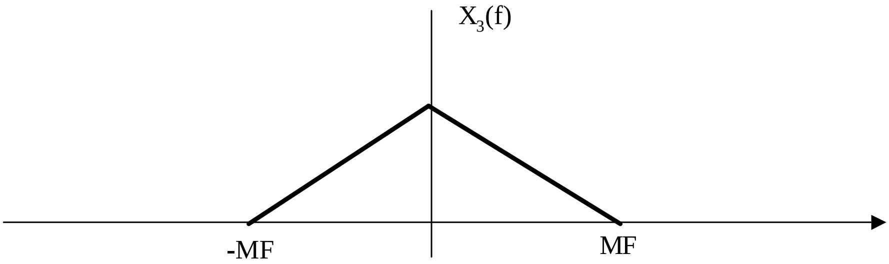
$$X_3(f) = \frac{1}{M} X_2\left(\frac{f}{M}\right) = \frac{A}{M} \Lambda_F\left(\frac{f}{M}\right).$$

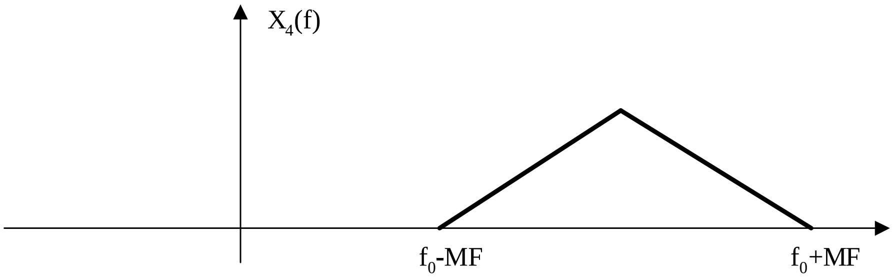
4) La transformée de Fourier de $x_4(t)$ s'écrit

$$\begin{aligned} X_4(f) &= X_3(f) * \delta(f - f_0) \\ &= X_3(f - f_0) \\ &= \frac{A}{M} \Lambda_F\left(\frac{f - f_0}{M}\right). \end{aligned}$$

5) En observant le spectre de $x_4(t)$, on s'aperçoit que les opérations successives décrites dans les questions 1), 2), 3) et 4) ont étalé le spectre situé autour de la fréquence f_0 du signal d'origine, ce qui correspond à un zoom spectral. Les opérations indiquées sont illustrées sur les figures ci-dessous







Exercice 2 : Zoom spectral pour signaux aléatoires

Enoncé

On considère un signal aléatoire stationnaire $X(t)$ de moyenne nulle et de densité spectrale de puissance

$$s_X(f) = A\left[\Lambda_F(f - f_0) + \Lambda_F(f + f_0)\right]$$

avec

$$\Lambda_F(f) = \begin{cases} 1 - \frac{|f|}{F} \text{ si } |f| < F \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

avec $f_0 > F > 0$. Pour toutes les représentations graphiques demandées dans cet exercice, on prendra $f_0 = 5$kHz et $F = 1$kHz.

1) Déterminer la fonction d'autocorrélation du signal $X(t)$.

2) On forme le signal

$$x_1(t) = x(t)\exp\left(-i2\pi f_0 t\right)$$

Déterminer la fonction d'autocorrélation (notée $R_1(\tau)$) et la densité spectrale de puissance (notée $s_1(f)$) du signal $x_1(t)$. Représenter graphiquement $s_1(f)$.

3) On filtre le signal $x_1(t)$ à l'aide d'un filtre passe-bas idéal de façon à ne conserver que la partie du spectre de $x_1(t)$ associée aux fréquences vérifiant $|f| < F$. Déterminer la fonction d'autocorrélation (notée $R_2(\tau)$) et la densité spectrale de puissance (notée $s_2(f)$) du signal résultant noté $x_2(t)$. Représenter graphiquement $s_2(f)$.

4) Le signal $x_2(t)$ est comprimé de manière à obtenir

$$x_3(t) = x_2\left(Mt\right) \text{ avec } M > 1.$$

Déterminer la fonction d'autocorrélation (notée $R_3(\tau)$) et la densité spectrale de puissance (notée $s_3(f)$) du signal $x_3(t)$. Représenter graphiquement $s_3(f)$.

5) Pour terminer, on module le signal $x_3(t)$ de manière à générer

$$x_4(t) = x_3(t)\exp\left[i2\pi f_0 t\right]$$

Déterminer la fonction d'autocorrélation (notée $R_4(\tau)$) et la densité spectrale de puissance (notée $s_4(f)$) du signal $x_4(t)$. Représenter graphiquement $s_4(f)$.
6) Expliquer pourquoi l'opération qui transforme le signal $x(t)$ en $x_4(t)$ peut être qualifiée de "zoom" spectral.

Réponses
1) La fonction d'autocorrélation du signal $X(t)$ est la transformée de Fourier inverse de $s_X(f)$, soit

$$\begin{aligned} R_X(\tau) &= ATF^{-1}\left[\Lambda_F(f-f_0)+\Lambda_F(f+f_0)\right] \\ &= ATF^{-1}\left[\Lambda_F(f)\right]\exp\left(2\pi f_0\tau\right)+ATF^{-1}\left[\Lambda_F(f)\right]\exp\left(-2\pi f_0\tau\right) \\ &= 2AF\sin c^2\left[\pi F\tau\right]\cos\left(2\pi f_0\tau\right). \end{aligned}$$

2) La fonction d'autocorrélation du signal $x_1(t)$ s'écrit

$$\begin{aligned} R_1(\tau) &= E\left[x_1(t)x_1^*(t-\tau)\right] \\ &= E\left[x(t)\exp\left(-i2\pi f_0 t\right)x^*(t-\tau)\exp\left(i2\pi f_0(t-\tau)\right)\right] \\ &= \exp\left(-i2\pi f_0\tau\right)E\left[x(t)x^*(t-\tau)\right] \\ &= \exp\left(-i2\pi f_0\tau\right)R_X(\tau) \end{aligned}$$

d'où sa densité spectrale de puissance

$$\begin{aligned} s_1(f) &= TF\left[R_1(\tau)\right] \\ &= \delta(f+f_0)*s_X(f) \\ &= s_X(f+f_0) \\ &= A\left[\Lambda_F(f)+\Lambda_F(f+2f_0)\right]. \end{aligned}$$

3) Si on filtre le signal $x_1(t)$ on obtient, en appliquant la relation de Wiener-Lee, un signal $x_2(t)$ de densité spectrale de puissance

$$s_2(f)=s_1(f)\left|H(f)\right|^2.$$

Avec le filtre proposé, on obtient

$$s_2(f)=A\Lambda_F(f)$$

d'où

$$R_2(\tau)=AF\sin\mathrm{c}^2\left(\pi F\tau\right).$$

4) La fonction d'autocorrélation du signal $x_3(t)$ s'écrit

$$\begin{aligned} R_3(\tau) &= E\left[x_3(t)x_3^*(t-\tau)\right] \\ &= E\left[x_2(Mt)x_2^*(Mt-M\tau)\right] \\ &= R_2(M\tau) \end{aligned}$$

d'où sa densité spectrale de puissance

$$\begin{aligned} s_3(f) &= TF\left[R_3(\tau)\right] \\ &= \frac{1}{M}s_2\left(\frac{f}{M}\right) \\ &= \frac{A}{M}\Lambda_F\left(\frac{f}{M}\right). \end{aligned}$$

5) Si on module le signal $x_3(t)$ comme demandé, on obtient

$$\begin{aligned} R_4(\tau) &= E\left[x_4(t)x_4^*(t-\tau)\right] \\ &= E\left[x_3(t)\exp\left(i2\pi f_0 t\right)x_3^*(t-\tau)\exp\left[-i2\pi f_0(t-\tau)\right]\right] \\ &= \exp\left(i2\pi f_0\tau\right)E\left[x_3(t)x_3^*(t-\tau)\right] \\ &= \exp\left(i2\pi f_0\tau\right)R_3(\tau) \end{aligned}$$

d'où la densité spectrale de puissance

$$\begin{aligned} s_4(f) &= \delta(f-f_0) * s_3(f) \\ &= s_3(f-f_0) \\ &= \frac{A}{M}\Lambda_F\left(\frac{f-f_0}{M}\right). \end{aligned}$$

6) On obtient la même expression qu'à la question 5) de l'exercice précédent. On a donc effectué un zoom autour de la fréquence f_0 sur la densité spectrale de puissance du signal d'origine.

Exercice 3 : Shot Noise

Enoncé

On considère un processus de Poisson homogène de paramètre λ noté $\{t_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ et le signal aléatoire $X(t)$ défini par

$$X(t) = \sum_i h(t-t_i) \text{ avec } h(t) = \Pi_T(t) = \begin{cases} 1 \text{ si } & -\frac{T}{2} \leq t \leq \frac{T}{2} \\ & 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

On rappelle que la loi de Poisson de paramètre λ est définie par

$$P\left[Y=k\right] = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda},\ k\in\mathbb{N} \text{ avec } E\left[Y\right] = \lambda.$$

1) Rappeler le rôle du paramètre λ dans un processus de Poisson.
2) Représenter graphiquement une réalisation du signal aléatoire $X(t)$.
3) On suppose que le signal

$$Z(t) = \sum_i \delta(t-t_i)$$

(où $\delta(.)$ est la distribution de Dirac) est un signal aléatoire stationnaire de moyenne $E\left[Z(t)\right] = \lambda$ et de fonction d'autocorrélation $E\left[Z(t)Z(t-\tau)\right] = \lambda^2 + \lambda\delta(\tau)$.

- Déterminer la densité spectrale de puissance du signal $X(t)$ puis sa fonction d'autocorrélation.
- Déterminer la moyenne et la variance du signal $X(t)$.

4) Chaque impulsion $h(t-t_i)$ est maintenant affectée par une amplitude c_i supposée aléatoire de moyenne $E\left[c_i^2\right] = \mu_c$ et de variance $\text{var}[c_i] = E\left[c_i^2\right] - E^2\left[c_i\right] = \sigma_c^2$, ce qui conduit à définir le signal

$$X_c(t) = \sum_i c_i h(t-t_i).$$

On suppose que les amplitudes c_i et c_j (avec $i \neq j$) sont des variables aléatoires indépendantes. On suppose également que les amplitudes $\{c_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ sont indépendantes des instants de Poisson $\{t_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$.

- Déterminer la moyenne du signal $X_c(t)$.
- Montrer que la variance du signal $X_c(t)$ est donnée par l'expression suivante

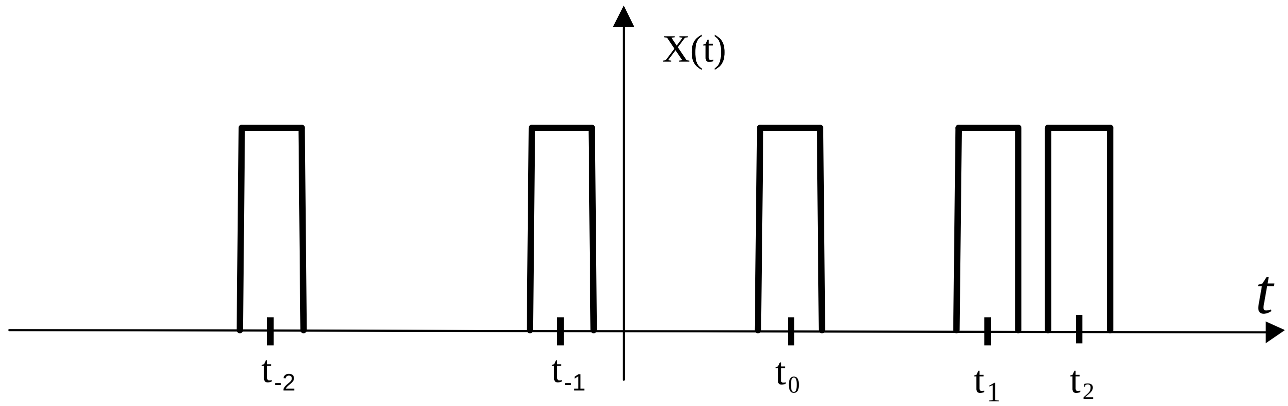
$$\text{var}\left[X_c(t)\right] = \left(\mu_c^2 + \sigma_c^2\right) \lambda T.$$

Correction

1) Une des propriétés d'un processus de Poisson est le fait que le nombre d'instants t_i situés dans un intervalle de largeur τ, par exemple $[t, t+\tau[$ noté $N(t,\tau)$ suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda\,|\tau|$. Donc, pour un intervalle de largeur unité, c'est-à-dire tel que $|\tau| = 1$, on a

$$E\left[N(t,\tau)\right] = \lambda.$$

Le paramètre λ représente donc le moyen d'instants dans un intervalle de largeur unité.
2) Une réalisation du signal aléatoire $X(t)$ est représentée ci-dessous



3) Le signal $X(t)$ est clairement obtenu par filtrage linéaire de $Z(t)$ par un filtre de réponse impulsionnelle $h(t)$. En effet,

$$Z(t) * h(t) = \sum_i \delta(t - t_i) * h(t) = X(t)$$

- La densité spectrale de puissance du signal $X(t)$ peut donc s'obtenir à l'aide de la relation de Wiener-Lee

$$\begin{aligned} s_X(f) &= s_Z(f)\,|H(f)|^2 \\ &= TF\left[\lambda^2 + \lambda\delta(\tau)\right] T^2 \sin c^2\left(\pi T f\right) \\ &= \left[\lambda^2\delta(f) + \lambda\right] T^2 \sin c^2\left(\pi T f\right) \\ &= \left(\lambda^2 T^2\right)\delta(f) + \lambda T^2 \sin c^2\left(\pi T f\right) \end{aligned}$$

On en déduit la fonction d'autocorrélation du signal $X(t)$

$$\begin{aligned} R_X(\tau) &= TF^{-1}\left[s_X(f)\right] \\ &= \lambda^2 T^2 + \lambda T \Lambda_T(\tau) \end{aligned}$$

- La moyenne du signal $X(t)$ se détermine comme suit

$$
\begin{aligned}
E\left[X(t)\right] &= E\left[Z(t) * h(t)\right] \\
&= E\left[\int h(u)Z(t-u)du\right] \\
&= \int h(u)E\left[Z(t-u)\right]du \\
&= \lambda \int h(u)du = \lambda T
\end{aligned}
$$

La variance de $X(t)$ s'écrit

$$
\begin{aligned}
\operatorname{var}\left[X(t)\right] &= E\left[X^2(t)\right] - E^2\left[X(t)\right] \\
&= R_X(0) - \lambda^2 T^2 \\
&= \lambda T.
\end{aligned}
$$

4)

- La moyenne du signal $X_c(t)$ s'écrit

$$
E\left[X_c(t)\right] = \sum_i E\left[c_i h(t-t_i)\right].
$$

En utilisant l'indépendance entre les amplitudes $\{c_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ et les instants de Poisson $\{t_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$, on en déduit

$$
\begin{aligned}
E\left[X_c(t)\right] &= \sum_i E\left[c_i\right]E\left[h(t-t_i)\right] \\
&= \sum_i \mu_c E\left[h(t-t_i)\right] \\
&= \mu_c E\left[\sum_i h(t-t_i)\right] \\
&= \mu_c E\left[X(t)\right] \\
&= \lambda T \mu_c.
\end{aligned}
$$

- Le calcul de la variance du signal $X_c(t)$ est similaire à celui effectué pour la moyenne

$$
\begin{aligned}
E\left[X_c^2(t)\right] &= E\left[\sum_i c_i h(t-t_i)\sum_j c_j h(t-t_j)\right] \\
&= \sum_{i,j} E\left[c_i c_j h(t-t_i)h(t-t_j)\right]
\end{aligned}
$$

en utilisant à nouveau l'indépendance entre les amplitudes $\{c_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ et les instants de Poisson $\{t_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$, on obtient

$$\begin{aligned}
E\left[X_c^2(t)\right] &= \sum_{i,j} E\left[c_i c_j\right] E\left[h(t-t_i)h(t-t_j)\right] \\
&= \sum_{i\neq j} \mu_c^2 E\left[h(t-t_i)h(t-t_j)\right] + \sum_{i=j} \left(\mu_c^2+\sigma_c^2\right) E\left[h^2(t-t_i)\right] \\
&= \mu_c^2 E\left[\sum_i h(t-t_i)\sum_j h(t-t_j)\right] + \sigma_c^2 \sum_{i=j} E\left[h^2(t-t_i)\right] \\
&= \mu_c^2 E\left[X^2(t)\right] + \sigma_c^2 \sum_i E\left[h^2(t-t_i)\right]
\end{aligned}$$

En utilisant le fait que

$$h^2(t-t_i) = h(t-t_i)$$

on a

$$\begin{aligned}
E\left[X_c^2(t)\right] &= \mu_c^2\left(\lambda T+\lambda^2T^2\right) + \sigma_c^2 \sum_i E\left[h(t-t_i)\right] \\
&= \mu_c^2\left(\lambda T+\lambda^2T^2\right) + \sigma_c^2 E\left[X(t)\right] \\
&= \mu_c^2\left(\lambda T+\lambda^2T^2\right) + \lambda T\sigma_c^2
\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}
\mathrm{var}\left[X_c(t)\right] &= E\left[X_c^2(t)\right] - E^2\left[X_c(t)\right] \\
&= \lambda T\left(\mu_c^2+\sigma_c^2\right)
\end{aligned}$$