Partiel de Traitement du Signal - Signaux Aléatoires

Mercredi 21 novembre 2011, 8h -10h.

Partiel sans documents (Une feuille A4 recto verso est autorisée)

Exercice 1 : Zoom spectral pour signaux déterministes

1) On considère un signal déterministe à énergie finie à valeurs réelles noté $x(t)$ de transformée de Fourier

$$X(f) = A\left[\Lambda_F(f - f_0) + \Lambda_F(f + f_0)\right]$$

avec

$$\Lambda_F(f) = \begin{cases} 1 - \frac{|f|}{F} \text{ si } |f| < F \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

et $f_0 > F > 0$ (on notera que $X(f)$ est une fonction paire).
1) On forme le signal

$$x_1(t) = x(t) \exp\left[-i2\pi f_0 t\right]$$

Déterminer la transformée de Fourier de $x_1(t)$ notée $X_1(f)$.
2) On filtre le signal $x_1(t)$ à l'aide d'un filtre passe-bas idéal de façon à ne conserver que la partie du spectre de $x_1(t)$ associée aux fréquences vérifiant $|f| < F$. Déterminer le signal résultant noté $x_2(t)$.
3) Le signal $x_2(t)$ est comprimé de manière à obtenir

$$x_3(t) = x_2\left(Mt\right) \text{ avec } M > 1.$$

Expliquer pourquoi l'opération qui fait passer de $x_2(t)$ à $x_3(t)$ peut être qualifiée de “compression”. Déterminer la transformée de Fourier de $x_3(t)$ notée $X_3(f)$.
4) Pour terminer, on module le signal $x_3(t)$ de manière à générer

$$x_4(t) = x_3(t) \exp\left[i2\pi f_0 t\right]$$

Déterminer la transformée de Fourier de $x_4(t)$ notée $X_4(f)$.
5) Représenter graphiquement $X_1(f), X_2(f), X_3(f)$ et $X_4(f)$ (pour toutes ces représentations graphiques, on prendra $f_0 = 5\text{kHz}$ et $F = 1\text{kHz}$) et expliquer pourquoi l'opération qui transforme le signal $x(t)$ en $x_4(t)$ peut être qualifiée de “zoom” spectral.

Exercice 2 : Zoom spectral pour signaux aléatoires

On considère un signal aléatoire stationnaire $X(t)$ de moyenne nulle et de densité spectrale de puissance

$$s_X(f) = A\left[\Lambda_F(f - f_0) + \Lambda_F(f + f_0)\right]$$

avec

$$\Lambda_F(f) = \begin{cases} 1 - \frac{|f|}{F} \text{ si } |f| < F \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

avec $f_0 > F > 0$. Pour toutes les représentations graphiques demandées dans cet exercice, on prendra $f_0 = 5\text{kHz}$ et $F = 1\text{kHz}$.
1) Déterminer la fonction d'autocorrélation du signal $X(t)$.
2) On forme le signal

$$x_1(t) = x(t) \exp\left[-i2\pi f_0 t\right]$$

Déterminer la fonction d'autocorrélation (notée $R_1(\tau)$) et la densité spectrale de puissance (notée $s_1(f)$) du signal $x_1(t)$. Représenter graphiquement $s_1(f)$.
3) On filtre le signal $x_1(t)$ à l'aide d'un filtre de fonction de transfert

$$H(f) = \begin{cases} 1 \text{ si } & -F \leq f \leq F \\ & 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

Déterminer la densité spectrale de puissance (notée $s_2(f)$) et la fonction d'autocorrélation (notée $R_2(\tau)$) du signal résultant noté $x_2(t)$. Représenter graphiquement $s_2(f)$.
4) Le signal $x_2(t)$ est comprimé de manière à obtenir

$$x_3(t) = x_2\left(Mt\right) \text{ avec } M > 1.$$

Déterminer la fonction d'autocorrélation (notée $R_3(\tau)$) et la densité spectrale de puissance (notée $s_3(f)$) du signal $x_3(t)$. Représenter graphiquement $s_3(f)$.
5) Pour terminer, on module le signal $x_3(t)$ de manière à générer

$$x_4(t) = x_3(t) \exp\left[i2\pi f_0 t\right]$$

Déterminer la fonction d'autocorrélation (notée $R_4(\tau)$) et la densité spectrale de puissance (notée $s_4(f)$) du signal $x_4(t)$. Représenter graphiquement $s_4(f)$.

Exercice 3 : Shot noise

On considère un processus de Poisson homogène de paramètre λ noté $\{t_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ et le signal aléatoire $X(t)$ défini par

$$X(t) = \sum_i h(t-t_i) \text{ avec } h(t) = \Pi_T(t) = \begin{cases} 1 \text{ si } & -\frac{T}{2} \leq t \leq \frac{T}{2} \\ & 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

On rappelle que la loi de Poisson de paramètre λ est définie par

$$P\left[Y=k\right] = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda},\ k \in \mathbb{N} \text{ avec } E\left[Y\right] = \lambda.$$

1) Rappeler le rôle du paramètre λ dans un processus de Poisson.
2) Représenter graphiquement une réalisation du signal aléatoire $X(t)$.
3) On rappelle que le signal

$$Z(t) = \sum_i \delta(t-t_i)$$

(où $\delta(.)$ est la distribution de Dirac) est un signal aléatoire stationnaire de moyenne $E\left[Z(t)\right] = \lambda$ et de fonction d'autocorrélation $E\left[Z(t)Z(t-\tau)\right] = \lambda^2 + \lambda\delta(\tau)$.

- Déterminer la densité spectrale de puissance du signal $X(t)$ puis sa fonction d'autocorrélation.
- Déterminer la moyenne et la variance du signal $X(t)$.

4) Chaque impulsion $h(t-t_i)$ est maintenant affectée par une amplitude c_i supposée aléatoire de moyenne $E\left[c_i\right] = \mu_c$ et de variance $\text{var}[c_i] = E\left[c_i^2\right] - E^2\left[c_i\right] = \sigma_c^2$, ce qui conduit à définir le signal

$$X_c(t) = \sum_i c_i h(t-t_i).$$

On suppose que les amplitudes c_i et c_j (avec $i \neq j$) sont des variables aléatoires indépendantes. On suppose également que les amplitudes $\{c_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ sont indépendantes des instants de Poisson $\{t_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$.

- Déterminer la moyenne du signal $X_c(t)$.
- Montrer que la variance du signal $X_c(t)$ est donnée par l'expression suivante

$$\text{var}\left[X_c(t)\right] = \left(\mu_c^2 + \sigma_c^2\right)\lambda T.$$

Transformée de Fourier

$$X(f) = \int_{\mathbb{R}} x(t) e^{-i2\pi f t} dt \qquad x(t) = \int_{\mathbb{R}} X(f) e^{i2\pi f t} df$$

T.F.

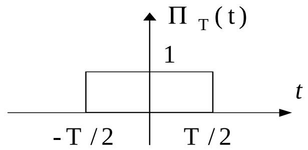
$x(t)$ réelle paire	$\rightleftharpoons$	$X(f)$ réelle paire
$x(t)$ réelle impaire	$\rightleftharpoons$	$X(f)$ imaginaire pure impaire
$x(t)$ réel	$\rightleftharpoons$	$\begin{cases} \mathrm{Re}\{X(f)\} \text{ paire} \\ \mathrm{Im}\{X(f)\} \text{ impaire} \\ \lvert X(f) \rvert \text{ pair} \\ \arg\{X(f)\} \text{ impaire} \end{cases}$
$ax(t) + by(t)$	$\rightleftharpoons$	$aX(f) + bY(f)$
$x(t - t_0)$	$\rightleftharpoons$	$X(f) e^{-i2\pi f t_0}$
$x(t) e^{+i2\pi f_0 t}$	$\rightleftharpoons$	$X(f - f_0)$
$x^*(t)$	$\rightleftharpoons$	$X^*(-f)$
$x(t)\ .\ y(t)$	$\rightleftharpoons$	$X(f) * Y(f)$
$x(t) * y(t)$	$\rightleftharpoons$	$X(f)\ .\ Y(f)$
$x(at)$	$\rightleftharpoons$	$\frac{1}{\lvert a \rvert} X\left(\frac{f}{a}\right)$
$\frac{dx^{(n)}(t)}{dt^n}$	$\rightleftharpoons$	$(i2\pi f)^n X(f)$
$(-i2\pi t)^n x(t)$	$\rightleftharpoons$	$\frac{dX^{(n)}(f)}{df^n}$

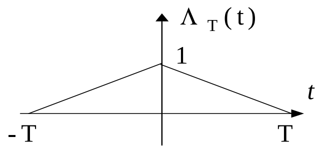
Formule de Parseval
$\int_{\mathbb{R}} x(t) y^*(t) dt = \int_{\mathbb{R}} X(f) Y^*(f) df$
$\int_{\mathbb{R}} \lvert x(t) \rvert^2 dt = \int_{\mathbb{R}} \lvert X(f) \rvert^2 df$

Série de Fourier
$x(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{+i2\pi n f_0 t} \rightleftharpoons X(f) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n \delta(f - n f_0)$
avec $c_n = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) e^{-i2\pi n f_0 t} dt$

T.F.

1	$\rightleftharpoons$	$\delta(f)$
$\delta(t)$	$\rightleftharpoons$	1
$e^{+i2\pi f_0 t}$	$\rightleftharpoons$	$\delta(f - f_0)$
$\delta(t - t_0)$	$\rightleftharpoons$	$e^{-i2\pi f t_0}$
$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \delta(t - kT)$	$\rightleftharpoons$	$\frac{1}{T} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \delta\left(f - \frac{k}{T}\right)$
$\cos(2\pi f_0 t)$	$\rightleftharpoons$	$\frac{1}{2}[\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)]$
$\sin(2\pi f_0 t)$	$\rightleftharpoons$	$\frac{1}{2i}[\delta(f - f_0) - \delta(f + f_0)]$
$e^{-a\lvert t \rvert}$	$\rightleftharpoons$	$\frac{2a}{a^2 + 4\pi^2 f^2}$
$e^{-\pi t^2}$	$\rightleftharpoons$	$e^{-\pi f^2}$
$\Pi_T(t)$	$\rightleftharpoons$	$T \frac{\sin(\pi T f)}{\pi T f} = T \sin c(\pi T f)$
$\Lambda_T(t)$	$\rightleftharpoons$	$T \sin c^2(\pi T f)$
$B \sin c(\pi B t)$	$\rightleftharpoons$	$\Pi_B(f)$
$B \sin c^2(\pi B t)$	$\rightleftharpoons$	$\Lambda_B(f)$





!!!!!! Attention !!!!!
$\Pi_T(t)$ est de support égal à T.
$\Lambda_T(t)$ est de support égal à $2T$
et on a $\Pi_T(t) * \Pi_T(t) = T\ \Lambda_T(t)$

$$\delta(t) = \begin{cases} 0 \text{ si } t \neq 0 \\ +\infty \text{ si } t = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \int_{\mathbb{R}} \delta(t)\, dt = 1$$

$$\delta(t - t_0) f(t) = \delta(t - t_0) f(t_0)$$

$$\delta(t - t_0) * f(t) = f(t - t_0)$$