**Partiel de Traitement du Signal.**

Lundi 25 novembre 2013

*Partiel sans document et sans calculatrice (Une feuille A4 recto verso est autorisée)*

## Première partie : quelques questions simples

1) On suppose que $A$ et $B$ sont deux variables aléatoires indépendantes de moyennes nulles et de variances $E[A^2] = E[B^2] = \sigma^2$. On construit le signal

$$X(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$$

où $\omega$ est une constante positive. Le signal $X(t)$ est-il stationnaire ? Déterminer la fonction d'autocorrélation et la densité spectrale de puissance du signal $X(t)$.
*Rappel :* $\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$
2) On considère un signal aléatoire stationnaire $X(t)$ de moyenne nulle et de densité spectrale de puissance $s_X(f) = 2a$, où $a$ est une constante positive. Le signal $Y(t)$ est obtenu par filtrage linéaire (invariant dans le temps) de $X(t)$ avec un filtre de transmittance

$$H(f) = \frac{1}{a + j2\pi f}.$$

Déterminer la densité spectrale de puissance, la fonction d'autocorrélation et la puissance du signal $Y(t)$.
3) On considère un signal aléatoire gaussien stationnaire $X(t)$ de moyenne nulle, de puissance $E[X^2(t)] = \sigma^2$ et de fonction d'autocorrélation $R_X(\tau) = E[X(t)X(t-\tau)]$. Déterminer la fonction d'autocorrélation du signal $Y(t) = \exp[X(t)]$ en fonction de $R_X(\tau)$ et d'une constante multiplicative notée $C$. Déterminer ensuite cette constante multiplicative.
*Indication : on rappelle que si $Z$ est une variable aléatoire Gaussienne de moyenne nulle et de variance $\sigma^2$, alors*

$$E\left[e^{uZ}\right] = \exp\left(\frac{u^2\sigma^2}{2}\right).$$

4) On considère une suite d'instants aléatoires $\{t_i\}_{i\in\mathbf{Z}}$ constituant un processus de Poisson (homogène) de paramètre $\lambda$. On appelle $N(t,\tau)$ le nombre d'instants appartenant à l'intervalle $[t, t+\tau[$

- Que représente le paramètre $\lambda$ ?
- Déterminer la probabilité d'avoir $N(t,\tau) = 0$.
- Déterminer la probabilité d'avoir $N(t,\tau)$ pair.

*Indication : on rappelle que si $Z$ est une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre $\mu$, on a*

$$P[Z = k] = \frac{\mu^k}{k!}e^{-\mu}, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

**Deuxième partie : fonction d'ambiguité**

On considère un signal déterministe à énergie finie noté $s(t)$ (de fonction d'autocorrélation $R_s(\tau)$ et de densité spectrale $S_s(f)$ représentant un signal émis par un radar. Ce signal intercepte une cible de vitesse $v_0$ située à la distance $R_0$ de la source et est réflèchi en direction du radar. Le signal reçu par le radar s'écrit

$$x(t) = y(t - t_a) + n(t)$$

avec

$$y(t) = s(t) \exp\left[j2\pi\left(f_0 + f_a\right)t\right]$$

où $t_a = 2R_0/c$ ($c$ est la vitesse de l'onde radar), $v_0 = \pi\lambda f_a$ ($\lambda$ est la longueur d'onde du signal radar), $f_0$ est la fréquence porteuse et $n(t)$ est un bruit blanc (de moyenne nulle) et de variance $\sigma^2$. L'objectif de ce problème est d'étudier une méthode permettant d'estimer $R_0$ et $v_0$ à partir du signal reçu $x(t)$.

1) A quelle classe de signaux appartient le signal $y(t)$ ? Déterminer la fonction d'autocorrélation de ce signal en fonction de $f_0, f_a$ et $R_s(\tau)$, puis sa densité spectrale en fonction de $f_0, f_a$ et $S_s(f)$.

2) On corrèle le signal reçu $x(t)$ avec une version décalée en temps et en fréquence du signal $s(t)$ en formant

$$R\left(t_h, f_h\right) = \int_R x(t) s^*\left(t - t_h\right) \exp\left[-j2\pi\left(f_0 + f_h\right)\left(t - t_h\right)\right] dt.$$

On appelle fonction d'ambiguité la transformée

$$\Lambda\left(\tau, \nu\right) = \left|E\left[R\left(t_h, f_h\right)\right]\right|$$

où $\tau = t_h - t_a$ et $\nu = f_h - f_a$. Montrer que $\Lambda\left(\tau, \nu\right)$ s'écrit

$$\Lambda\left(\tau, \nu\right) = \left|\int_{\mathbb{R}} s(u) s^*(u - \tau) \exp\left[-j2\pi\nu u\right] du\right|. \tag{1}$$

3) Déterminer $\Lambda\left(\tau, \nu\right)$ lorsque $s(t)$ est un pulse défini par

$$s(t) = \frac{1}{\sqrt{T}}\Pi_T(t) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{T}} \text{ si } |t| < \frac{T}{2} \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

et tracer $\Lambda\left(0, \nu\right)$ et $\Lambda\left(\tau, 0\right)$. Montrer que $\Lambda\left(\tau, \nu\right)$ admet son maximum en $\tau = 0$ et $\nu = 0$ et en déduire une méthode permettant d'estimer $R_0$ et $\nu_0$ à partir de la fonction d'ambiguité.

## Transformée de Fourier

$$X(f)=\int_{\mathbb{R}} x(t)e^{-i2\pi ft}dt \qquad x(t)=\int_{\mathbb{R}} X(f)e^{i2\pi ft}df$$

| | T.F. | |
|---|---|---|
| $x(t)$ réelle paire | $\rightleftharpoons$ | $X(f)$ réelle paire |
| $x(t)$ réelle impaire | $\rightleftharpoons$ | $X(f)$ imaginaire pure impaire |
| $x(t)$ réel | $\rightleftharpoons$ | $\begin{cases} \mathrm{Re}\{X(f)\} \text{ paire} \\ \mathrm{Im}\{X(f)\} \text{ impaire} \\ \lvert X(f)\rvert \text{ pair} \\ \arg\{X(f)\} \text{ impaire} \end{cases}$ |
| $ax(t)+by(t)$ | $\rightleftharpoons$ | $aX(f)+bY(f)$ |
| $x(t-t_0)$ | $\rightleftharpoons$ | $X(f)e^{-i2\pi ft_0}$ |
| $x(t)e^{+i2\pi f_0 t}$ | $\rightleftharpoons$ | $X(f-f_0)$ |
| $x^*(t)$ | $\rightleftharpoons$ | $X^*(-f)$ |
| $x(t)\ .\ y(t)$ | $\rightleftharpoons$ | $X(f)*Y(f)$ |
| $x(t)*y(t)$ | $\rightleftharpoons$ | $X(f)\ .\ Y(f)$ |
| $x(at)$ | $\rightleftharpoons$ | $\frac{1}{\lvert a\rvert}X\left(\frac{f}{a}\right)$ |
| $\frac{dx^{(n)}(t)}{dt^n}$ | $\rightleftharpoons$ | $(i2\pi f)^n X(f)$ |
| $(-i2\pi t)^n x(t)$ | $\rightleftharpoons$ | $\frac{dX^{(n)}(f)}{df^n}$ |

| Formule de Parseval |
|---|
| $\int_{\mathbb{R}} x(t)y^*(t)dt=\int_{\mathbb{R}} X(f)Y^*(f)df$ |
| $\int_{\mathbb{R}} \lvert x(t)\rvert^2 dt=\int_{\mathbb{R}} \lvert X(f)\rvert^2 df$ |

| Série de Fourier |
|---|
| $x(t)=\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{+i2\pi nf_0 t} \rightleftharpoons X(f)=\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} c_n\delta(f-nf_0)$ |
| avec $c_n=\frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t)e^{-i2\pi nf_0 t}dt$ |

| | T.F. | |
|---|---|---|
| $1$ | $\rightleftharpoons$ | $\delta(f)$ |
| $\delta(t)$ | $\rightleftharpoons$ | $1$ |
| $e^{+i2\pi f_0 t}$ | $\rightleftharpoons$ | $\delta(f-f_0)$ |
| $\delta(t-t_0)$ | $\rightleftharpoons$ | $e^{-i2\pi ft_0}$ |
| $\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}}\delta(t-kT)$ | $\rightleftharpoons$ | $\frac{1}{T}\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}}\delta\left(f-\frac{k}{T}\right)$ |
| $\cos(2\pi f_0 t)$ | $\rightleftharpoons$ | $\frac{1}{2}[\delta(f-f_0)+\delta(f+f_0)]$ |
| $\sin(2\pi f_0 t)$ | $\rightleftharpoons$ | $\frac{1}{2i}[\delta(f-f_0)-\delta(f+f_0)]$ |
| $e^{-a\lvert t\rvert}$ | $\rightleftharpoons$ | $\frac{2a}{a^2+4\pi^2 f^2}$ |
| $e^{-\pi t^2}$ | $\rightleftharpoons$ | $e^{-\pi f^2}$ |
| $\Pi_T(t)$ | $\rightleftharpoons$ | $T\frac{\sin(\pi Tf)}{\pi Tf}=T\sin c(\pi Tf)$ |
| $\Lambda_T(t)$ | $\rightleftharpoons$ | $T\sin c^2(\pi Tf)$ |
| $B\sin c(\pi Bt)$ | $\rightleftharpoons$ | $\Pi_B(f)$ |
| $B\sin c^2(\pi Bt)$ | $\rightleftharpoons$ | $\Lambda_B(f)$ |

**!!!!!! Attention !!!!!**
$\Pi_T(t)$ est de support égal à $T$.
$\Lambda_T(t)$ est de support égal à $2T$
et on a $\Pi_T(t)*\Pi_T(t)=T\ \Lambda_T(t)$

$$\begin{aligned}
\delta(t) &= \begin{cases} 0 \text{ si } t\neq 0 \\ +\infty \text{ si } t=0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \int_{\mathbb{R}}\delta(t)\,dt=1 \\
\delta(t-t_0)\,f(t) &= \delta(t-t_0)\,f(t_0) \\
\delta(t-t_0)*f(t) &= f(t-t_0)
\end{aligned}$$