Traitement du Signal

Jean-Yves Tourneret[1]

(1) Université of Toulouse, ENSEEIHT-IRIT-TéSA

jyt@n7.fr

Bibliographie

- J. Max et J.-L. Lacoume, Méthodes et techniques de traitement du signal, Dunod, 5^{me} édition, 2004.
- Athanasios Papoulis and S. Unnikrishna Pillai, Probability, Random Variable and Stochastic Processes, McGraw Hill Higher Education, 4th edition, 2002.

Plan du cours

- Chapitre 1 : Corrélations et Spectres
  - Transformée de Fourier
  - Classes de signaux déterministes et aléatoires
  - Propriétés de $R_x(\tau)$ et de $s_x(f)$
- Chapitre 2 : Échantillonnage
- Chapitre 3 : Filtrage Linéaire
- Chapitre 4 : Traitements Non-linéaires

Transformée de Fourier

- Définitions
  - Formule directe

$$X(f) = \int_{\mathbb{R}} x(t) \exp\left(-j2\pi f t\right) dt$$

  - Formule inverse

$$x(t) = \int_{\mathbb{R}} X(f) \exp\left(j2\pi f t\right) df$$

- Hypothèses

  TF sur L^1 ou L^2

Propriétés

- Linéarité

$$\text{TF}\left[ax(t) + by(t)\right] = aX(f) + bY(f)$$

- Parité $x(t)$ réelle paire $\Rightarrow X(f)$ réelle paire
- Translation et Modulation

$$\text{TF}\left[x(t - t_0)\right] = \exp(-j2\pi f t_0)X(f)$$

$$\text{TF}\left[x(t)\exp(j2\pi f_0 t)\right] = X(f - f_0)$$

- Similitude

$$\text{TF}\left[x(at)\right] = \frac{1}{|a|}X\left(\frac{f}{a}\right)$$

Propriétés

- Produits de Convolution

$$\text{TF}\left[x(t) * y(t)\right] = X(f)Y(f)$$
$$\text{TF}\left[x(t)y(t)\right] = X(f) * Y(f)$$

- Égalite de Parseval

$$\int_{\mathbb{R}} x(t)y^*(t)dt = \int_{\mathbb{R}} X(f)Y^*(f)df$$

- Conjugaison

$$\text{TF}\left[x^*(t)\right] = X^*(-f)$$

Distributions

- Localisation

$$x(t)\delta(t-t_0) = x(t_0)\delta(t-t_0)$$

- Produit de Convolution

$$x(t) * \delta(t-t_0) = x(t-t_0)$$

- Transformées de Fourier

$$\text{TF}\left[\delta(t)\right] = 1,\ \text{TF}\left[1\right] = \delta(f)$$

$$\text{TF}\left[\delta(t-t_0)\right] = \exp(-j2\pi f t_0),\ \text{TF}\left[\exp(j2\pi f_0 t)\right] = \delta(f-f_0)$$

Plan du cours

- Chapitre 1 : Corrélations et Spectres
  - Transformée de Fourier
  - Classes de signaux déterministes et aléatoires
  - Propriétés de $R_x(\tau)$ et de $s_x(f)$
- Chapitre 2 : Échantillonnage
- Chapitre 3 : Filtrage Linéaire
- Chapitre 4 : Traitements Non-linéaires

Classes de signaux déterministes et aléatoires

- Classe 1 : signaux déterministes à énergie finie
- Classe 2 : signaux déterministes périodiques à puissance finie
- Classe 3 : signaux déterministes non périodiques à puissance finie
- Classe 4 : signaux aléatoires stationnaires

Signaux déterministes à énergie finie

- Définition E $= \int_{\mathbb{R}} |x(t)|^2 dt = \int_{\mathbb{R}} |X(f)|^2 df < \infty$
- Fonction d'autocorrélation

$$R_x(\tau) = \int_{\mathbb{R}} x(t)x^*(t-\tau)dt = \langle x(t), x(t-\tau)\rangle$$

- Fonction d'intercorrélation

$$R_{xy}(\tau) = \int_{\mathbb{R}} x(t)y^*(t-\tau)dt = \langle x(t), y(t-\tau)\rangle$$

- Produit scalaire

$$\langle x(t), y(t)\rangle = \int_{\mathbb{R}} x(t)y^*(t)dt$$

Densité spectrale d'énergie

- Définition

$$s_x(f) = \text{TF}\left[R_x(\tau)\right]$$

- Propriété

$$s_x(f) = \left|X(f)\right|^2$$

  - Preuve

$$\begin{aligned}
s_x(f) &= \int_{\mathbb{R}} \left[\int_{\mathbb{R}} x(t)x^*(t-\tau)dt\right] \exp(-j2\pi f\tau)d\tau \\
&= \int_{\mathbb{R}} \left[\int_{\mathbb{R}} x^*(t-\tau)\exp(-j2\pi f\tau)d\tau\right] x(t)dt \\
&= \int_{\mathbb{R}} \left[\int_{\mathbb{R}} x^*(u)\exp\left[j2\pi f(u-t)\right]du\right] x(t)dt \\
&= X^*(f)X(f)
\end{aligned}$$

Exemple

- Fenêtre rectangulaire

$$x(t) = \Pi_T(t) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad -\frac{T}{2} < t < \frac{T}{2} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

- Fonction d'autocorrélation

$$R_x(\tau) = T\Lambda_T(\tau)$$

- Densité spectrale d'énergie

$$s_x(f) = T^2 \text{sinc}^2(\pi T f) = |X(f)|^2$$

Signaux déterministes périodiques

- Définition $\mathsf{P} = \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} |x(t)|^2 dt < \infty$
- Fonction d'autocorrélation

$$R_x(\tau) = \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t)x^*(t-\tau)dt = \langle x(t), x(t-\tau)\rangle$$

- Fonction d'intercorrélation

$$R_{xy}(\tau) = \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t)y^*(t-\tau)dt = \langle x(t), y(t-\tau)\rangle$$

- Produit scalaire

$$\langle x(t), y(t)\rangle = \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t)y^*(t)dt$$

Densité spectrale de puissance

- Définition

$$s_x(f) = \text{TF}\left[R_x(\tau)\right]$$

- Propriété

$$s_x(f) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} |c_k|^2 \delta(f - kf_0)$$

avec $x(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k \exp(j2\pi k f_0 t)$.

- Preuve

$$R_x(\tau) = \sum_{k,l} c_k c_l^* \exp\left(j2\pi l f_0 \tau\right) \left[\frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} \exp\left[j2\pi(k-l)f_0 t\right] dt\right]$$

$$= \sum_{k} |c_k|^2 \exp(j2\pi k f_0 \tau)$$

Exemple

- Sinusoïde

$$x(t) = A\cos(2\pi f_0 t)$$

- Fonction d'autocorrélation

$$R_x(\tau) = \frac{A^2}{2}\cos(2\pi f_0 \tau)$$

- Densité spectrale de puissance

$$s_x(f) = \frac{A^2}{4}\left[\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)\right]$$

Signaux déterministes à puissance finie

- Définition $\mathsf{P} = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2 dt < \infty$
- Fonction d'autocorrélation

$$R_x(\tau) = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) x^*(t-\tau) dt = \langle x(t), x(t-\tau) \rangle$$

- Fonction d'intercorrélation

$$R_{xy}(\tau) = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) y^*(t-\tau) dt = \langle x(t), y(t-\tau) \rangle$$

- Produit scalaire

$$\langle x(t), y(t) \rangle = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) y^*(t) dt$$

Densité spectrale de puissance

- Définition

$$s_x(f) = \text{TF}\left[R_x(\tau)\right]$$

- Propriété

$$s_x(f) = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \left|X_T(f)\right|^2$$

avec

$$X_T(f) = \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \exp(-j2\pi f t) dt$$

- Exemple

$$x(t) = A_1 \cos(2\pi f_1 t) + A_2 \cos(2\pi f_2 t)$$

avec f_1 et f_2 non commensurables.

Signaux aléatoires stationnaires

- Définition
  - Moyenne : $E[x(t)]$ indépendant de t
  - Moment d'ordre 2 : $E[x(t)x^*(t-\tau)]$ indépendant de t
- Fonction d'autocorrélation

$$R_x(\tau) = E[x(t)x^*(t-\tau)] = \langle x(t), x(t-\tau) \rangle$$

- Fonction d'intercorrélation

$$E[x(t)y^*(t-\tau)] = \langle x(t), y(t-\tau) \rangle$$

- Produit scalaire

$$\langle x(t), y(t) \rangle = E[x(t)y^*(t)]$$

Remarques : stationnarité au sens strict, large, à l'ordre deux, tests de stationnarité.

Densité spectrale de puissance

- Puissance moyenne

$$P = R_x(0) = E\left[|x(t)|^2\right] = \int_{\mathbb{R}} s_x(f)df$$

- Densité spectrale de puissance
  - Définition

$$s_x(f) = \text{TF}\left[R_x(\tau)\right]$$

  - Propriété

$$s_x(f) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} E\left[|X_T(f)|^2\right]$$

mais en général $X(f)$ n'existe pas !

Exemples

- Exemple 1 : Sinusoïde

$$x(t) = A\cos(2\pi f_0 t + \theta)$$

θ va uniforme sur $[0, 2\pi]$.

- Fonction d'autocorrélation

$$R_x(\tau) = \frac{A^2}{2}\cos(2\pi f_0 \tau)$$

- Densité spectrale de puissance

$$s_x(f) = \frac{A^2}{4}\left[\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)\right]$$

Exemples

- Exemple 2 : Bruit blanc
  - Fonction d'autocorrélation

$$R_x(\tau) = \frac{N_0}{2}\delta(\tau)$$

  - Densité spectrale de puissance

$$s_x(f) = \frac{N_0}{2}$$

Plan du cours

- Chapitre 1 : Corrélations et Spectres
  - Transformée de Fourier
  - Classes de signaux déterministes et aléatoires
  - Propriétés de $R_x(\tau)$ et de $s_x(f)$
- Chapitre 2 : Échantillonnage
- Chapitre 3 : Filtrage Linéaire
- Chapitre 4 : Traitements Non-linéaires

Propriétés de $R_x(\tau)$

- Symétrie Hermitienne : $R_x^*(-\tau) = R_x(\tau)$
- Valeur maximale : $|R_x(\tau)| \leq R_x(0)$
- Distance entre $x(t)$ et $x(t-\tau)$: si $x(t)$ est un signal réel

$$d^2\left[x(t), x(t-\tau)\right] = 2\left[R_x(0) - R_x(\tau)\right]$$

  Donc $R_x(\tau)$ mesure le lien entre $x(t)$ et $x(t-\tau)$.
- Décomposition de Lebesgue : dans la quasi-totalité des applications, on a

$$R_x(\tau) = R_1(\tau) + R_2(\tau)$$

  où $R_1(\tau)$ est une somme de fonctions périodiques et $R_2(\tau)$ tend vers 0 lorsque $\tau \to \infty$.

Propriétés de $s_x(f)$

- DSP réelle

$$s_x(f) \in \mathbb{R}$$

  De plus, si $x(t)$ signal réel, $s_x(f)$ réelle paire

- Positivité : $s_x(f) \geq 0$
- Lien entre DSP et puissance/énergie

$$P \text{ ou } E = R_x(0) = \int_{\mathbb{R}} s_x(f)df$$

- Décomposition de Lebesgue : dans la quasi-totalité des applications, on a $s_x(f) = s_1(f) + s_2(f)$, où $s_1(f)$ est un spectre de raies et $s_2(f)$ un spectre continu (cas général : partie singulière).

Que faut-il savoir ?

- Reconnaître si un signal est à énergie finie, à puissance finie périodique ou aléatoire.
- Qu'est ce qu'un signal aléatoire stationnaire ?
- Les différentes définitions d'une fonction d'autocorrélation $R_x(\tau)$
- La définition unifiée d'une densité spectrale : $s_x(f)$ = ?
- Les différentes définitions d'une densité spectrale
- Ce qu'est un bruit blanc
- Ce qu'est un bruit gaussien
- Propriétés de $R_x(\tau)$
- Propriétés de $s_x(f)$

Plan du cours

- Chapitre 1 : Corrélations et Spectres
- Chapitre 2 : Échantillonnage
  - Échantillonnage idéal
  - Échantillonnage réel
  - Méthodes pratiques de restitution
- Chapitre 3 : Filtrage Linéaire
- Chapitre 4 : Traitements Non-linéaires

Échantillonnage idéal

- Signaux à énergie finie
  - Domaine temporel

$$x_e(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} x(kT_e)\delta(t - kT_e) = x(t)\sum_{k\in\mathbb{Z}} \delta(t - kT_e)$$

  - Domaine Fréquentiel

$$X_e(f) = X(f) * F_e \sum_{k\in\mathbb{Z}} \delta(f - kF_e) = F_e \sum_{k\in\mathbb{Z}} X(f - kF_e)$$

Périodisation du spectre

Commentaires

- Théorème de Shannon

$$F_e > 2f_{\max}$$

- Restitution

$$X_r(f) = \frac{1}{F_e} X_e(f) \Pi_{F_e}(f)$$

- Interpolateur de Shannon

$$x_r(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} x(kT_e) \text{sinc} \left[\pi F_e (t - kT_e) \right]$$

- Généralisation

$$x_r(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} x(kT_e) h \left(t - kT_e \right)$$

Commentaires

- Fréquences normalisées

$$F_e > 2f_{\max} \Leftrightarrow \widetilde{f} = \frac{f}{F_e} \leq \frac{1}{2}$$

- Repliement et filtre anti-repliement
- Généralisation : signaux déterministes à puissance finie

Échantillonnage d'une sinusoïde

- Signal et spectre

$$x(t) = A\cos(2\pi f_0 t) \;\Leftrightarrow\; X(f) = \frac{A}{2}\left[\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)\right]$$

- Cas particulier

$$F_e = 2f_0$$

- Repliement

$$f_0 = 5\text{kHz et } F_e = 100\text{kHz}$$

$$f_0 = 5\text{kHz et } F_e = 8\text{kHz}$$

Filtre de restitution $\Pi_{F_e}(f)$

Signaux aléatoires stationnaires

- Theorème de Shannon
  Si $x(t)$ est un signal aléatoire stationnaire à bande limitée, i.e.,
  $$s_x(f) = 0 \quad |f| > f_{\max}$$
  et que $F_e > 2f_{\max}$ alors
  $$x_N(t) = \sum_{k=-N}^{N} x(kT_e)\text{sinc}\left[\pi F_e(t - kT_e)\right] \underset{N\to\infty}{\overset{\mathcal{MQ}}{\longrightarrow}} x(t)$$
- Preuve
  voir livre de Papoulis page 378.

Signaux aléatoires stationnaires

- Autocorrélation

$$R_x(\tau) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} R_x(kT_e) \text{sinc}\left[\pi F_e(\tau - kT_e)\right]$$

  Interpolateur de Shannon pour $R_x(\tau) = \text{TF}^{-1}[s_x(f)]$.

- Densité spectrale de puissance
  Si on pose $y(n) = x(nT_e)$ alors

$$s_y\left(\widetilde{f}\right) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} R_y(k) e^{-j2\pi k \widetilde{f}} = F_e \sum_{k \in \mathbb{Z}} s_x\left(\frac{\widetilde{f} - k}{T_e}\right)$$

  Périodisation de la densité spectrale de puissance

Preuve

$$
\begin{aligned}
s_y\left(\widetilde{f}\right) &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} R_y(k) e^{-j2\pi k\widetilde{f}} \\
&= \sum_{k\in\mathbb{Z}} R_y(k) \int_{\mathbb{R}} e^{-j2\pi\widetilde{f}t}\delta(t-k)dt \\
&= \int_{\mathbb{R}} e^{-j2\pi\widetilde{f}t}\left[\sum_{k\in\mathbb{Z}} R_x(kT_e)\delta(t-k)\right]dt \\
&= TF\left[R_x(tT_e)\sum_{k\in\mathbb{Z}}\delta(t-k)\right] \\
&= \frac{1}{T_e}s_x\left(\frac{\widetilde{f}}{T_e}\right) * \sum_{k\in\mathbb{Z}}\delta\left(\widetilde{f}-k\right) \qquad \text{CQFD}
\end{aligned}
$$

Plan du cours

- Chapitre 1 : Corrélations et Spectres
- Chapitre 2 : Filtrage Linéaire
- Chapitre 3 : Échantillonnage
  - Échantillonnage idéal
  - Échantillonnage réel
  - Méthodes pratiques de restitution
- Chapitre 4 : Traitements Non-linéaires

Échantillonnage bloqueur

- Domaine temporel

$$x_b(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} x(kT_e)\pi_\tau\left(t - \frac{\tau}{2} - kT_e\right) = x_e(t) * \pi_\tau\left(t - \frac{\tau}{2}\right)$$

- Domaine spectral

$$X_b(f) = \frac{\tau}{T_e} e^{-j\pi\tau f}\text{sinc}(\pi\tau f)\sum_{k\in\mathbb{Z}} X(f - kF_e)$$

- Spectre d'ordre 0

$$X_0(f) = \frac{\tau}{T_e} e^{-j\pi\tau f}\text{sinc}(\pi\tau f) X(f)$$

Conditions de restitution

Échantillonnage réel

- Échantillonnage moyenneur
  voir TD
- Échantillonnage à porte analogique
  ...
- Exemples
  - Téléphone

$$f_{\max} = 3400Hz \text{ et } F_e = 8kHz$$

  - Audio

$$f_{\max} = 15kHz \text{ et } F_e = 44.1kHz$$

Plan du cours

- Chapitre 1 : Corrélations et Spectres
- Chapitre 2 : Filtrage Linéaire
- Chapitre 3 : Échantillonnage
  - Échantillonnage idéal
  - Échantillonnage réel
  - Méthodes pratiques de restitution
- Chapitre 4 : Traitements Non-linéaires

Restitution

- Filtrage passe bas

$$H(f) = \Pi_{F_e}(f)$$

- Interpolation linéaire
  Filtre non causal
- Bloqueur d'ordre 0
  Utilisé dans la quasi-totalité des applications

Que faut-il savoir ?

- Echantillonnage = périodisation du spectre
- Théorème de Shannon pour les signaux déterministes et aléatoires
- Interpolateur de Shannon
- Filtre anti-repliement
- Fréquences normalisées
- Effets du repliement spectral

Plan du cours

- Chapitre 1 : Corrélations et Spectres
- Chapitre 2 : Échantillonnage
- Chapitre 3 : Filtrage Linéaire
  - Introduction
  - Relations de Wiener-Lee
  - Formule des interférences
  - Exemples
- Chapitre 4 : Traitements Non-linéaires

Introduction

On cherche une opération avec les propriétés suivantes

- Linéarité : $T\left[a_1 x_1(t) + a_2 x_2(t)\right] = a_1 T\left[x_1(t)\right] + a_2 T\left[x_2(t)\right]$
- Invariance dans le temps
  Si $y(t) = T\left[x(t)\right]$ alors $T\left[x(t-t_0)\right] = y(t-t_0)$
- Stabilité BIBO
  Si $|x(t)| \leq M_x$ alors il existe M_y tel que

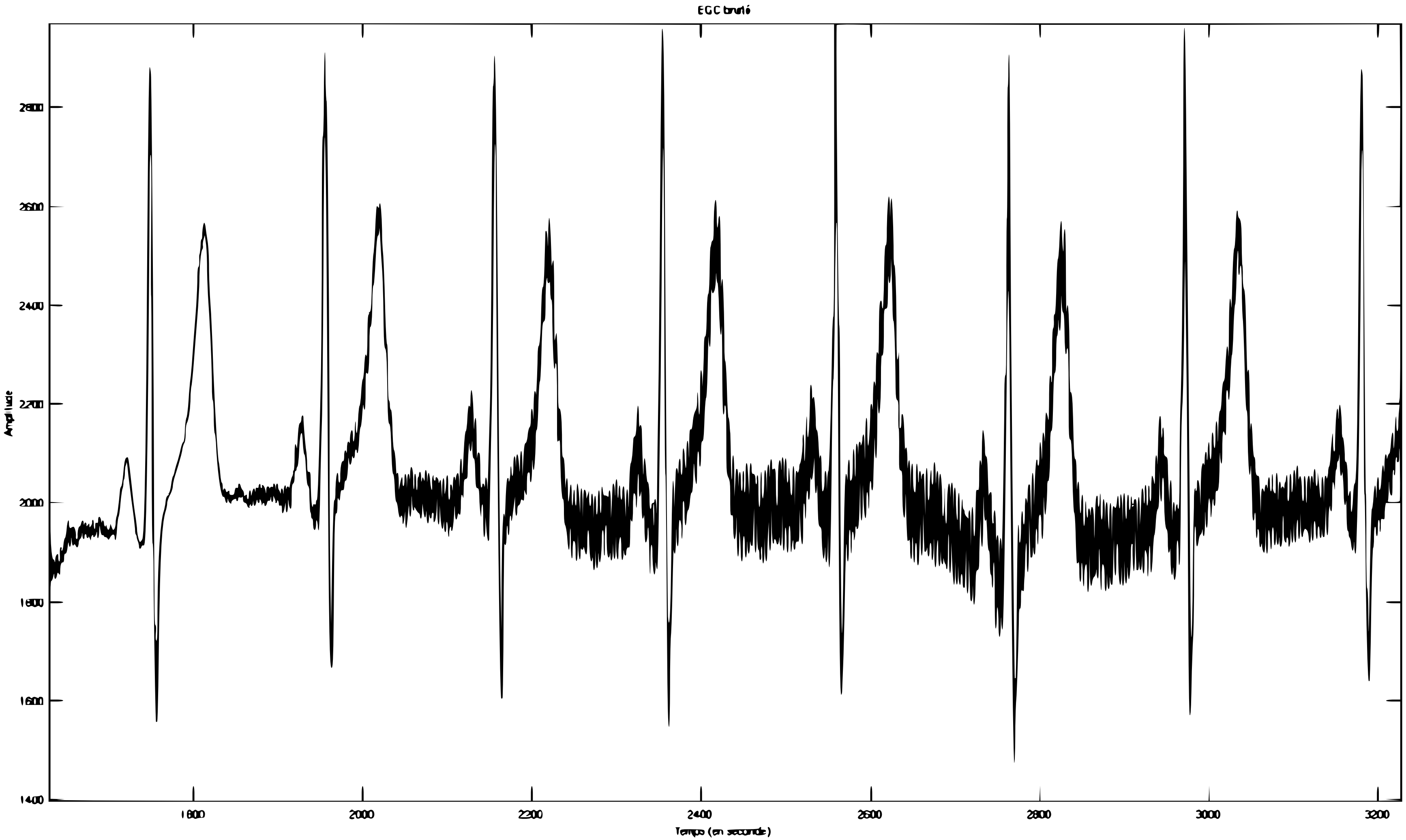
$$|y(t)| = \left|T\left[x(t)\right]\right| \leq M_y$$

- "Limitation" du spectre d'un signal

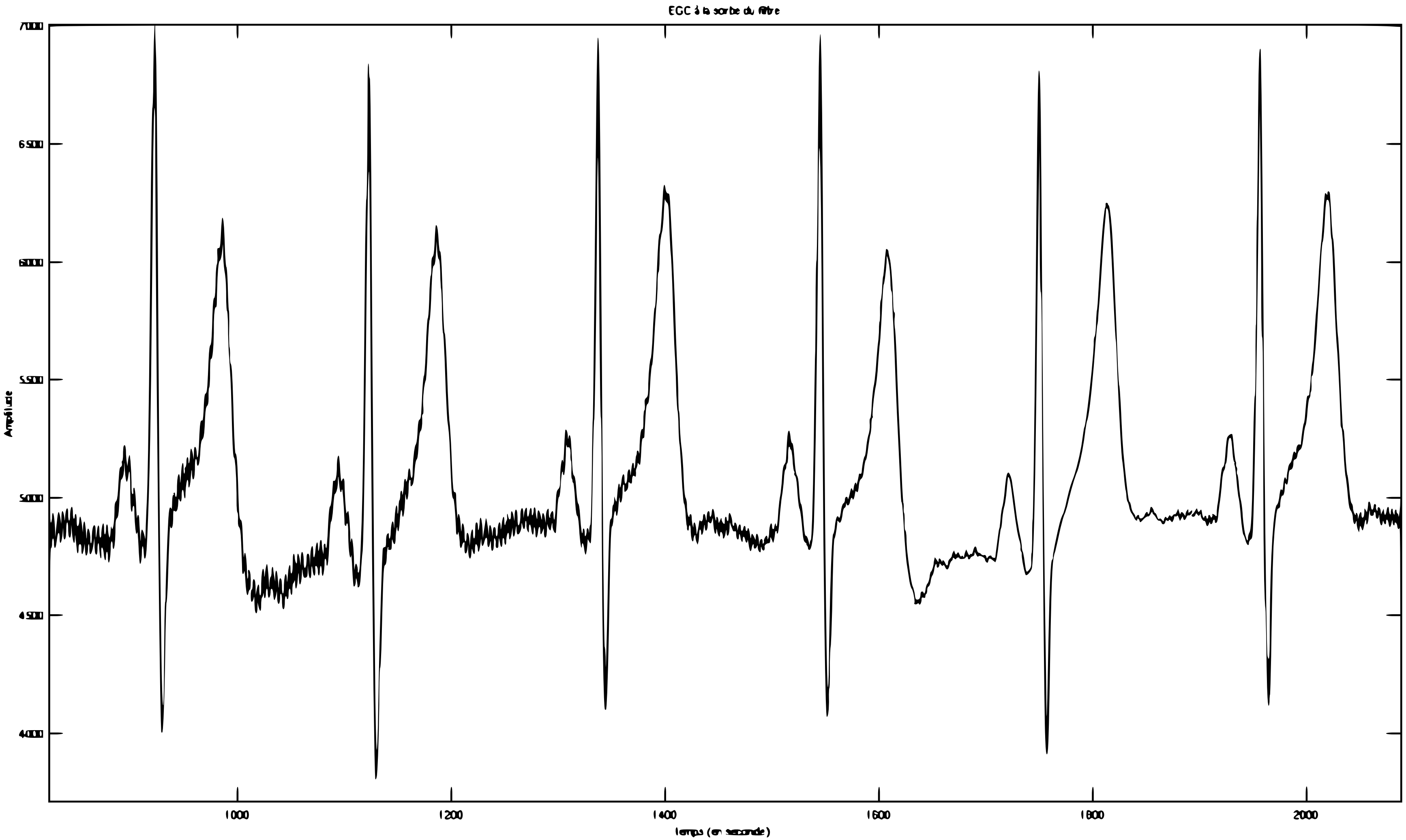
☞ Convolution

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{\mathbb{R}} x(u) h(t-u) du = h(t) * x(t)$$

ECG avant filtrage



ECG après filtrage



Commentaires

- La linéarité ne suffit pas. Contre-exemple

$$y(t) = m(t)x(t)$$

- CNS de Stabilité BIBO

$$\int_{\mathbb{R}} |h(t)|dt < \infty, \text{i.e.}, h \in L^1$$

- Réponse impulsionnelle et Transmittance

$$H(f) = \text{TF}\left[h(t)\right] = \int_{\mathbb{R}} h(t) \exp(-j2\pi f t)dt$$

Si $x(t) = \delta(t)$ alors $y(t) = h(t)$. Ceci permet d'obtenir la seule réponse impulsionnelle possible.

Réalisabilité d'un filtre

- Domaine temporel
  - (1) $h(t)$ réelle
  - (2) $h(t) \in L^1$ (stabilité)
  - (3) $h(t)$ causale (filtre sans mémoire)
- Domaine spectral
  - (1) Symétrie hermitienne : $H^*(-f) = H(f)$
  - (2) ne peut se traduire
  - (3) $H(f) = -j\widetilde{H}(f)$, où $\widetilde{H}(f) = H(f) * \frac{1}{\pi f}$ est la transformée de Hilbert de H (preuve dans le cours manuscrit).

Écriture équivalente

En écrivant $H(f) = H_r(f) + jH_i(f)$, on obtient

$$
\begin{aligned}
H_r(f) &= H_i(f) * \frac{1}{\pi f} \\
H_i(f) &= -H_r(f) * \frac{1}{\pi f}
\end{aligned}
$$

Identifier une relation de filtrage linéaire

- Signaux déterministes

$$y(t) = x(t) * h(t) \;\Leftrightarrow\; Y(f) = X(f)H(f)$$

- Signaux aléatoires : Isométrie fondamentale

$$\text{Si } x(t) \overset{I}{\leftrightarrow} e^{j2\pi f t}, \text{ alors } y(t) \overset{I}{\leftrightarrow} e^{j2\pi f t} H(f)$$

- Exemples
  - $y(t) = \sum_{k=1}^{n} a_k x(t - t_k)$
  - $y(t) = x'(t)$
  - $y(t) = x(t)m(t)$

Plan du cours

- Chapitre 1 : Corrélations et Spectres
- Chapitre 2 : Filtrage Linéaire
  - Introduction
  - Relations de Wiener-Lee
  - Formule des interférences
  - Exemples
- Chapitre 3 : Échantillonnage
- Chapitre 4 : Traitements Non-linéaires

Relations de Wiener Lee

- Densité spectrale de puissance

$$s_y(f) = s_x(f)|H(f)|^2$$

- Intercorrélation

$$R_{yx}(\tau) = R_x(\tau) * h(\tau)$$

- Autocorrélation

$$R_y(\tau) = R_x(\tau) * h(\tau) * h^*(-\tau)$$

Preuves (signaux à énergie finie)

- Densité spectrale de puissance

$$s_y(f) = |Y(f)|^2 = |X(f)H(f)|^2 = s_x(f)|H(f)|^2$$

- Intercorrélation

$$\begin{aligned}
R_{yx}(\tau) &= \int_{\mathbb{R}} y(u)x^*(u-\tau)du \\
&= \int_{\mathbb{R}} Y(f)\left[e^{-j2\pi f\tau}X(f)\right]^* df \\
&= \int_{\mathbb{R}} X(f)H(f)\left[e^{j2\pi f\tau}X^*(f)\right] df \\
&= \int_{\mathbb{R}} s_x(f)H(f)e^{j2\pi f\tau}df = \text{TF}^{-1}[s_x(f)H(f)] \quad \text{CQFD}
\end{aligned}$$

Preuve (signaux à puissance finie)

- Intercorrélation

$$
\begin{aligned}
R_{yx}(\tau) &= \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} y(t) x^*(t-\tau) dt \\
&= \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} \left[\int_{\mathbb{R}} h(v) x(t-v) dv \right] x^*(t-\tau) dt \\
&= \int_{\mathbb{R}} h(v) \left[\frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t-v) x^*(t-\tau) dt \right] dv \\
&= \int_{\mathbb{R}} h(v) R_x(\tau - v) dv \quad \text{CQFD}
\end{aligned}
$$

- etc ...

Preuves (signaux aléatoires)

- Intercorrélation

$$
\begin{aligned}
R_{yx}(\tau) =& E[y(t)x^*(t-\tau)] \\
=& \langle y(t), x(t-\tau) \rangle \\
=& \langle e^{j2\pi f t} H(f), e^{j2\pi f (t-\tau)} \rangle \\
=& \int_{\mathbb{R}} e^{j2\pi f t} H(f) e^{-j2\pi f (t-\tau)} s_X(f) df \\
=& \int_{\mathbb{R}} H(f) e^{j2\pi f \tau} s_X(f) df \\
=& h(\tau) * R_x(\tau) \quad \text{CQFD}
\end{aligned}
$$

Preuves (signaux aléatoires)

- Autocorrélation

$$
\begin{aligned}
R_y(\tau) =& E[y(t)y^*(t-\tau)] \\
=& \langle y(t), y(t-\tau)\rangle \\
=& \langle e^{j2\pi ft}H(f), e^{j2\pi f(t-\tau)}H(f)\rangle \\
=& \int_{\mathbb{R}} e^{j2\pi ft}H(f)e^{-j2\pi f(t-\tau)}H^*(f)s_x(f)df \\
=& \int_{\mathbb{R}} |H(f)|^2 s_x(f)e^{j2\pi f\tau}df \\
=& \text{TF}^{-1}\{s_x(f)|H(f)|^2\} \\
=& \ h(\tau) * h^*(-\tau) * R_x(\tau) \quad \text{CQFD}
\end{aligned}
$$

Preuves (signaux aléatoires)

- Autocorrélation

$$R_y(\tau) = \text{TF}^{-1}\{s_x(f)|H(f)|^2\}$$

- Densité Spectrale de Puissance

$$s_y(f) = s_x(f)|H(f)|^2 \quad \text{CQFD}$$

Valeur moyenne

- Propriété

$$E[Y(t)] = E[X(t)]H(0)$$

- Preuve

$$\begin{aligned} E[Y(t)] =& E\left[\int_{\mathbb{R}} X(t-u)h(u)du\right] \\ =& \int_{\mathbb{R}} E[X(t-u)]h(u)du \\ =& E[X(t)]\int_{\mathbb{R}} h(u)du \quad \text{(signal stationnaire)} \\ =& E[X(t)]H(0) \quad \text{CQFD} \end{aligned}$$

Plan du cours

- Chapitre 1 : Corrélations et Spectres
- Chapitre 2 : Filtrage Linéaire
  - Introduction
  - Relations de Wiener-Lee
  - Formule des interférences
  - Exemples
- Chapitre 3 : Échantillonnage
- Chapitre 4 : Traitements Non-linéaires

Formule des interférences

- Hypothèses

$$y_1(t) = x(t) * h_1(t) \text{ et } y_2(t) = x(t) * h_2(t)$$

- Conclusion

$$R_{y_1 y_2}(\tau) = \int_{\mathbb{R}} s_x(f) H_1(f) H_2^*(f) e^{j2\pi f\tau} df$$

  - Preuve (signaux à énergie finie)

$$R_{y_1 y_2}(\tau) = \int y_1(t) y_2^*(t-\tau) dt = \int_{\mathbb{R}} Y_1(f) \left[Y_2(f) e^{-j2\pi f\tau} \right]^* df$$

$$= \int_{\mathbb{R}} H_1(f) H_2^*(f) e^{j2\pi f\tau} s_x(f) df \quad \text{CQFD}$$

Plan du cours

- Chapitre 1 : Corrélations et Spectres
- Chapitre 2 : Filtrage Linéaire
  - Introduction
  - Relations de Wiener-Lee
  - Formule des interférences
  - Exemples
- Chapitre 3 : Échantillonnage
- Chapitre 4 : Traitements Non-linéaires

Exemples

- Filtre Passe-bas
  - Transmittance

$$H(f) = \Pi_F(f)$$

  - Réponse impulsionnelle

$$h(t) = F\text{sinc}\left(\pi F t\right)$$

    non causale et $\notin L^1 \;\Rightarrow\;$ troncature + décalage

- Filtres liaisons montante et descendante d'une chaîne de transmission

Que faut-il savoir ?

- Reconnaître une relation de filtrage linéaire
- Densité spectrale de puissance de la sortie d'un filtre
- Intercorrélation entre l'entrée et la sortie d'un filtre
- Moyenne de la sortie d'un filtre
- Formule des interférences
- Réponse impulsionnelle causale et $\in L^1$, sinon ...

Plan du cours

- Chapitre 1 : Corrélations et Spectres
- Chapitre 2 : Échantillonnage
- Chapitre 3 : Filtrage Linéaire
- Chapitre 4 : Traitements Non-linéaires
  - Introduction
  - Quadrateur
  - Quantification

Introduction

- Transformation sans mémoire

$$y(t) = g\left[x(t)\right]$$

- Exemples
  - Quadrateur

$$y(t) = x^2(t)$$

  - Quantification

$$y(t) = x_Q(t)$$

Plan du cours

- Chapitre 1 : Corrélations et Spectres
- Chapitre 2 : Échantillonnage
- Chapitre 3 : Filtrage Linéaire
- Chapitre 4 : Traitements Non-linéaires
  - Introduction
  - Quadrateur
  - Quantification

Quadrateur

- Signaux déterministes

$$Y(f) = X(f) * X(f)$$

- Exemples
  - Sinusoïde : $x(t) = A\cos(2\pi f_0 t)$

$$Y(f) = \frac{A^2}{2}\delta(f) + \frac{A^2}{4}\left[\delta(f - 2f_0) + \delta(f + 2f_0)\right]$$

    Disparition de la fréquence f_0 et apparition de la fréquence $2f_0$
  - Somme de sinusoïdes : Termes d'intermodulation
  - Sinus cardinal : doublement de la largeur de bande

Quadrateur pour signaux aléatoires

- Théorème de Price
  - Hypothèses
    (X_1, X_2) vecteur Gaussien de moyenne nulle
    $Y_1 = g(X_1)$ et $Y_2 = g(X_2)$
  - Conclusion

$$\frac{\partial E(Y_1 Y_2)}{\partial E(X_1 X_2)} = E\left(\frac{\partial Y_1}{\partial X_1}\frac{\partial Y_2}{\partial X_2}\right)$$

  - Application au quadrateur

$$R_Y(\tau) = 2R_X^2(\tau) + K$$

Remarques

- Loi Gaussienne bivariée

$$p(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi\sqrt{|\Sigma|}} \exp\left(-\frac{1}{2}\boldsymbol{x}^T \Sigma^{-1} \boldsymbol{x}\right)$$

- Stationnarité

$$E\left[Y(t)Y(t-\tau)\right] = \int\int g\left(x_1\right) g\left(x_2\right) p\left(x_1, x_2\right) dx_1 dx_2$$

avec $x_1 = X(t)$, $x_2 = X(t-\tau)$ et

$$\Sigma = \begin{pmatrix} R_X(0) & R_X(\tau) \\ R_X(\tau) & R_X(0) \end{pmatrix}$$

Détermination de K

- Moments d'une loi Gaussienne centrée

$$E\left(X^{2n+1}\right)=0,\ E\left(X^{2n}\right)=[(2n-1)\times(2n-3)...\times 3\times 1]\sigma^{2n}$$

- $\tau=0$

$$E\left[Y^2(t)\right]=E\left[X^4(t)\right]=3R_X^2(0)=2R_X^2(0)+K$$

- Autocorrélation

$$R_Y(\tau)=2R_X^2(\tau)+R_X^2(0)$$

- Densité spectrale de puissance

$$s_Y(f)=2s_X(f)*s_X(f)+R_X^2(0)\delta(f)$$

Plan du cours

- Chapitre 1 : Corrélations et Spectres
- Chapitre 2 : Échantillonnage
- Chapitre 3 : Filtrage Linéaire
- Chapitre 4 : Traitements Non-linéaires
  - Introduction
  - Quadrateur
  - Quantification

Quantification

- Principe

$$x_Q(t) = i\Delta q_i = x_i \text{ et } x_i - \frac{\Delta q_i}{2} \leq x(t) \leq x_i + \frac{\Delta q_i}{2}$$

- Définitions
  - Pas de quantification Δq_i
  - Quantification uniforme $\Delta q_i = \Delta q = \frac{2A_{\max}}{N}$
  - Niveaux de quantification: x_i
  - Nombre de bits de quantification $N = 2^n$

Erreur de quantification

- Hypothèse

  $\epsilon(t)$ suit la loi uniforme sur $\left[-\frac{\Delta q}{2}, \frac{\Delta q}{2}\right]$, i.e., $N \geq 2^8$

- Rapport signal sur bruit de quantification

$$\text{SNR}_{\text{dB}} = 10 \log_{10}\left(\frac{\sigma_x^2}{\sigma_\epsilon^2}\right)$$

  - Variance du bruit : $\sigma_\epsilon^2 = \frac{(\Delta q)^2}{12}$
  - Sinusoïde : $\sigma_x^2 = \frac{A^2}{2}$

- Conclusion

$$\text{SNR}_{\text{dB}} = 6n + 1.76$$

Remarques

- Généralisation à un signal Gaussien

$$2S\sigma = N\Delta q \;\Rightarrow\; \text{SNR}_{\text{dB}} = 6n + \ldots$$

- Quantification non uniforme

Que faut-il savoir ?

- Traitement non-linéaire = possibilité de créer de nouvelles fréquences
- Savoir appliquer le théorème de Price. Intérêt ?
- Définition et propriétés de la quantification
- Savoir calculer le rapport signal sur bruit de quantification