TD 1 STATISTIQUE - ESTIMATION STATISTIQUE - 2GE

Exercice 1

On considère la variable aléatoire "durée d'attente à un feu rouge". La durée maximale d'attente à ce feu rouge est notée θ, paramètre inconnu strictement positif. On observe un échantillon $t_1, ..., t_n$ de taille n, où t_i désigne la durée d'attente observée pour le $i^{ème}$ individu. On fait l'hypothèse que les variables aléatoires T_i associées aux observations t_i sont indépendantes et de même loi uniforme sur $[0, \theta]$ i.e. $T_i \sim U[0, \theta]$.

1) Représenter le graphe de la densité de la loi $U[0, \theta]$ et préciser ses paramètres moyenne et variance.

2) On désire estimer le paramètre θ. Déterminer le biais et la variance de $\overline{T} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} T_i$. En déduire que $\widehat{\theta}_1 = 2\overline{T}$ est un estimateur sans biais et convergent en probabilité de θ.

3) Montrer que l'estimateur du maximum de vraisemblance de θ est $Y_n = \sup_i T_i$.

a) En utilisant l'équivalence des événements suivante $Y_n < y \iff T_i < y, \forall i = 1, ..., n$, calculer la fonction de répartition de Y_n. En déduire sa densité et calculer $E[Y_n]$ et Var(Y_n).

b) Montrer que $\widehat{\theta}_2 = \frac{n+1}{n} Y_n$ est un estimateur sans biais et convergent en probabilité de θ.

4) Lequel des deux estimateurs $\widehat{\theta}_1$ et $\widehat{\theta}_2$ choisiriez-vous pour estimer θ ?

Exercice 2

La durée de fonctionnement d'un matériel électrique est représentée par une variable aléatoire réelle X suivant une loi de Weibull de densité :

$$f(x; \theta, \lambda) = \frac{\lambda}{\theta} x^{\lambda - 1} \exp\left\{-\frac{x^\lambda}{\theta}\right\} \qquad x > 0$$

avec $\theta > 0$ et $\lambda > 0$. On suppose que λ est connu.

1) Déterminer la loi de $U = X^\lambda$ puis calculer $E(X^\lambda)$ et $Var(X^\lambda)$.

2) On considère un échantillon $(X_1, ..., X_n)$ de même loi que X. Calculer l'estimateur du maximum de vraisemblance $\widehat{\theta}_n$ de θ. Cet estimateur est-il sans biais ? convergent ? efficace ? Calculer son erreur quadratique moyenne.

Exercice 3

Soient $X_1, ..., X_n$, n variables aléatoires indépendantes de même loi de densité :

$$f(x) = \beta e^{\beta(\alpha - x)} 1_{[\alpha, +\infty[}(x)$$

1) α étant connu, déterminer l'estimateur du maximum de vraisemblance de $\omega = 1/\beta$ noté $\widehat{\omega}$. Vérifier qu'il est sans biais et convergent. Montrer enfin que $\widehat{\omega}$ est l'estimateur efficace de ω.

2) β étant connu, étudier l'estimateur du maximum de vraisemblance de α noté $\widehat{\alpha}$. On admet que la densité de probabilité de $\widehat{\alpha}$ est :

$$f(u) = n\beta e^{n\beta(\alpha - u)} 1_{[\alpha, +\infty[}(u)$$

En s'aidant de ce qui a été fait à la première question, déterminer le biais et la variance de $\widehat{\alpha}$. En déduire un estimateur sans biais et convergent de α. Déterminer $E\left[\frac{\partial^2 \ln f(X_1, ..., X_n; \alpha)}{\partial \alpha^2}\right]$. Que dire de l'efficacité de $\widehat{\alpha}$?

3) β étant connu, déterminer l'estimateur de α obtenu à l'aide de la méthode des moments noté $\overline{\alpha}$. Comparer les deux estimateurs $\overline{\alpha}$ et $\widehat{\alpha}$.