TD 2 STATISTIQUE - TESTS - 2GE

Exercice 1

Afin de tester la satisfaction des clients à service donné, on effectue un sondage et on définit une variable aléatoire Y_i de la façon suivante :

$$\begin{aligned} Y_i &= 1 \text{ si le client } i \text{ est satisfait} \\ Y_i &= 0 \text{ si le client } i \text{ n'est pas satisfait} \end{aligned}$$

A l'aide d'un échantillon $(Y_1, ..., Y_n)$ de même loi de Bernoulli

$$\begin{aligned} P[Y_i = 0] &= \theta \\ P[Y_i = 1] &= 1 - \theta \end{aligned}$$

on désire tester les hypothèese $H_0 : \theta = \theta_0 = 0.52$ et $H_1 : \theta = \theta_1 = 0.48$.

1) Construire la vraisemblance des observations $y_1, ..., y_n$ et expliciter la région de rejet de H_0 du test de Neyman-Pearson (pour l'application numérique, on choisira un risque de première espèce $\alpha = 0.1$).

2) Déterminer la puissance de ce test.

Exercice 2

On dispose de n observations $x_1, ..., x_n$ issues d'un échantillon $(X_1, ..., X_n)$ de loi normale $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$.

1) Déterminer suivant les valeurs de σ_0^2 et de σ_1^2, la statistique $T(X_1, ..., X_n)$ et la région critique du test de Neyman-Pearson associé au problème suivant :

$$\begin{cases} H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2 \\ H_1 : \sigma^2 = \sigma_1^2 \end{cases}$$

Commenter la forme de la statistique de test. Dans la suite de ce problème, on supposera $\sigma_1 > \sigma_0$.

2) Exprimer le risque de seconde espèce β en fonction de $\alpha, \sigma_0^2, \sigma_1^2$ et n.

3) Déterminer les courbes COR (caractéristiques opérationnelles du récepteur) associées au problème précédent. On posera

$$\Phi_n(x) = \int_x^{+\infty} f_n(u)\, du$$

où $f_n(u)$ est la densité d'une loi du χ_n^2 et on notera $\Phi_n^{-1}(x)$ son inverse. Comment la puissance du test de Neyman Pearson dépend-elle de σ_0 et de σ_1 ? Représenter la forme approximative des courbes COR pour différentes valeurs de ces paramètres.

4) Quelle est la loi asymptotique de la statistique $T(X_1, ..., X_n)$ sous les deux hypothèses H_0 et H_1 ? En utilisant cette loi asymptotique, déterminer la valeur du risque de seconde espèce β en fonction de $\alpha, \sigma_0^2, \sigma_1^2$ et n.