



Exercice 1

1) La densité du vecteur (x_1, \dots, x_n) s'écrit

$$f(x_1, \dots, x_n; \lambda) \underset{X_i \text{ va indépendantes}}{=} \prod_{i=1}^n f(x_i; \lambda) = \lambda^n e^{-\lambda \sum_{i=1}^n x_i}$$

En posant comme d'habitude $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$, on obtient

$$\ln f(x_1, \dots, x_n; \lambda) = n \ln \lambda - n\lambda \bar{x}$$

Donc

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ln f(x_1, \dots, x_n; \lambda)}{\partial \lambda} &\geq 0 \Leftrightarrow \frac{n}{\lambda} - n\bar{x} \geq 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{\bar{x}} \geq \lambda \end{aligned}$$

Un petit tableau de variation permet de montrer que la vraisemblance admet un maximum global unique pour $\theta = \bar{x}$, d'où

$$\hat{\lambda}_{MV} = \frac{1}{\bar{X}} = \frac{n}{\sum_{i=1}^n X_i}$$

2) L'estimateur MMSE du paramètre λ est la moyenne de la loi a posteriori de $\lambda | X_1, \dots, X_n$

$$\hat{\lambda}_{MMSE} = E[\lambda | X_1, \dots, X_n]$$

D'après la formule de Bayes, on a

$$\begin{aligned} f(\lambda | x_1, \dots, x_n) &= \frac{f(x_1, \dots, x_n | \lambda) f(\lambda)}{f(x_1, \dots, x_n)} \\ &\propto f(x_1, \dots, x_n | \lambda) f(\lambda) \\ &\propto \lambda^n e^{-\lambda \sum_{i=1}^n x_i} \frac{1}{\lambda} \\ &\propto \lambda^{n-1} e^{-\lambda \sum_{i=1}^n x_i} \end{aligned}$$

On reconnaît à une constante multiplicative près l'expression d'une loi Gamma $\Gamma(\sum_{i=1}^n x_i, n)$ dont la moyenne est

$$E[\lambda | X_1, \dots, X_n] = \frac{n}{\sum_{i=1}^n X_i} = \boxed{\frac{1}{\bar{X}}}$$

Comme on peut le constater, l'estimateur MMSE est identique à l'estimateur du maximum de vraisemblance.

L'estimateur MAP qui maximise la loi a Posteriori se détermine en cherchant le maximum de $f(\lambda|x_1, \dots, x_n)$, c'est-à-dire le maximum de $h(\lambda) = \lambda^{n-1}e^{-\lambda\sum_{i=1}^n x_i}$. Par analogie aux résultats su 1), on obtient

$$\hat{\lambda}_{MAP} = \frac{n-1}{\sum_{i=1}^n X_i} = \boxed{\frac{n-1}{n\bar{X}}}$$

L'estimateur MAP est donc très similaire à l'estimateur du maximum de vraisemblance. On dit que la loi a priori $g(\lambda)$ est non informative : elle n'apporte pas d'information sur le paramètre λ .

3) Le calcul de P est élémentaire

$$P = \int_0^1 \lambda e^{-\lambda x} dx = [-e^{-\lambda x}]_0^1 = 1 - e^{-\lambda}$$

donc à l'aide de la propriété d'invariance de l'estimateur du maximum de vraisemblance, on a

$$\hat{P}_{MV} = 1 - e^{-\hat{\lambda}_{MV}} = \boxed{1 - e^{-\frac{1}{\bar{X}}}}$$

4) On a

$$\begin{aligned} E[Y_i] &= 1P[Y_i = 1] + 0P[Y_i = 0] = P \\ \text{var}Y_i &= E\left[\underbrace{Y_i^2}_{=Y_i}\right] - E[Y_i]^2 = P - P^2 \end{aligned}$$

Le calcul de la moyenne et de la variance de T est alors standard :

$$\begin{aligned} E[T] &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E[Y_i] = \boxed{P} \\ \text{var}T &\underset{\substack{= \\ Y_i \text{ va indépendantes}}}{=} \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \text{var}[Y_i] = \boxed{\frac{P(1-P)}{n}} \end{aligned}$$

La première égalité nous dit que T est un estimateur sans biais de P . Puisque T est un estimateur non biaisé de P et que $\text{var}T \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, T est un estimateur qui converge en probabilité vers P .

5) Les variables aléatoires Y_i étant indépendantes et de même loi de moyenne P et de variance $P(1-P)$, le théorème de la limite centrale s'applique :

$$\boxed{\frac{\sum_{i=1}^n Y_i - nP}{\sqrt{nP(1-P)}} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{L} \mathcal{N}(0, 1)}$$

En d'autres termes, pour n "grand", on peut approcher la loi de $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i$ par une loi normale $\mathcal{N}\left(P, \frac{P(1-P)}{n}\right)$. A l'aide des tables de la loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$, on obtient

$$P\left[\left|\frac{\sum_{i=1}^n Y_i - nP}{\sqrt{nP(1-P)}}\right| < 1.96\right] = 0.95$$

On en déduit alors un intervalle de confiance pour P avec un coefficient de confiance $\alpha = 0.95$:

$$\left[\frac{\sum_{i=1}^n Y_i - nP}{\sqrt{nP(1-P)}} \right]^2 < (1.96)^2$$

$$\frac{n^2 (\bar{Y} - P)^2}{n(P - P^2)} < (1.96)^2$$

ce qui conduit à une équation du second degré en P

$$(1.96)^2 (P - P^2) - n (\bar{Y} - P)^2 > 0$$

c'est-à-dire

$$\boxed{-P^2 (n + (1.96)^2) + P ((1.96)^2 + 2n\bar{Y}) - n (\bar{Y})^2 > 0}$$

Si les deux racines de cette équation sont P_1 et P_2 avec $P_2 > P_1$, l'intervalle de confiance pour P avec un coefficient de confiance $\alpha = 0.95$ est

$$P_1 < P < P_2$$

6) La moyenne de $U(\omega) = \sum_{i=1}^n \omega_i Y_i$ est

$$E[U(\omega)] = \sum_{i=1}^n \omega_i E[Y_i] = P \left(\sum_{i=1}^n \omega_i \right)$$

On en déduit alors que

$$\tilde{U}(\omega) = \frac{U(\omega)}{\sum_{i=1}^n \omega_i} = \boxed{\frac{\sum_{i=1}^n \omega_i Y_i}{\sum_{i=1}^n \omega_i}}$$

La variance de ce nouvel estimateur est

$$var[\tilde{U}(\omega)] \underset{Y_i \text{ va indépendantes}}{=} \frac{\sum_{i=1}^n \omega_i^2 var Y_i}{(\sum_{i=1}^n \omega_i)^2}$$

c'est-à-dire

$$var[\tilde{U}(\omega)] = P(1-P) \frac{\sum_{i=1}^n \omega_i^2}{(\sum_{i=1}^n \omega_i)^2}$$

L'inégalité de Cauchy Schwartz appliqué à $\langle U, V \rangle = \sum_{i=1}^n U_i V_i$ donne

$$\left| \sum_{i=1}^n U_i V_i \right|^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n U_i^2 \right) \left(\sum_{i=1}^n V_i^2 \right)$$

En posant $U_i = \omega_i$ et $V_i = 1$, on a

$$\left(\sum_{i=1}^n \omega_i \right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n \omega_i^2 \right) n$$

d'où

$$\boxed{var[\tilde{U}(\omega)] \geq \frac{P(1-P)}{n} = var[T]}$$

Cette inégalité indique qu'on ne peut diminuer la variance de l'estimateur T à l'aide de $\tilde{U}(\omega)$.

Exercice 2

1) Le test de Neyman Pearson est défini par

$$\text{Rejet de } H_0 \text{ si } \frac{f(x_1, \dots, x_n | H_1)}{f(x_1, \dots, x_n | H_0)} > K_\alpha$$

c'est-à-dire

$$\text{Rejet de } H_0 \text{ si } \frac{\lambda_1^n e^{-\lambda_1 \sum_{i=1}^n x_i}}{\lambda_0^n e^{-\lambda_0 \sum_{i=1}^n x_i}} > K_\alpha \iff \sum_{i=1}^n x_i < S_\alpha$$

La statistique de test est donc $T = \sum_{i=1}^n X_i$ et la région critique du test est définie par

$$\left\{ x = (x_1, \dots, x_n) \mid \sum_{i=1}^n x_i < S_\alpha \right\}$$

2) On effectue un changement de variables classique bijectif de \mathbb{R}^+ dans \mathbb{R}^+ puisque

$$Y_i = 2\lambda X_i \iff X_i = \frac{Y_i}{2\lambda}$$

Le jacobien de la transformation est

$$J = \left| \frac{dX_i}{dY_i} \right| = \frac{1}{2\lambda}$$

d'où la densité de Y_i

$$\begin{aligned} g(y) &= \lambda e^{-\lambda \frac{y}{2\lambda}} \frac{1}{2\lambda} I_{\mathbb{R}^+}(y) \\ &= \frac{1}{2} e^{-\frac{y}{2}} I_{\mathbb{R}^+}(y) \end{aligned}$$

qui est (d'après les tables) la densité d'une loi du chi2 à deux degrés de liberté soit $Y_i \sim \chi_2^2$.
La fonction caractéristique de U s'écrit

$$E[e^{itU}] = E\left[e^{it \sum_{k=1}^n Y_k}\right] \underset{Y_k \text{ va indépendantes}}{=} \prod_{k=1}^n E[e^{itY_k}]$$

Donc, d'après les tables

$$E[e^{itU}] = \prod_{k=1}^n \frac{1}{1-2it} = \frac{1}{(1-2it)^n}$$

d'où

$$U \sim \chi_{2n}^2$$

3) Le risque de première espèce est défini par :

$$\begin{aligned}\alpha &= P[\text{rejeter } H_0 | H_0 \text{ vraie}] \\ &= P[T < S_\alpha | \lambda = \lambda_0] \\ &= P[2\lambda_0 T < 2\lambda_0 S_\alpha | 2\lambda_0 T = U \sim \chi_{2n}^2]\end{aligned}$$

Donc

$$\alpha = \Phi_{2n}(2\lambda_0 S_\alpha) \text{ i.e. } \boxed{S_\alpha = \frac{1}{2\lambda_0} \Phi_{2n}^{-1}(\alpha)}$$

La puissance du test $\pi = 1 - \beta$ peut alors se calculer comme suit :

$$\begin{aligned}\pi &= 1 - \beta = 1 - P[\text{rejeter } H_1 | H_1 \text{ vraie}] \\ &= P[\text{rejeter } H_0 | H_1 \text{ vraie}] \\ &= P[T < S_\alpha | \lambda = \lambda_1] \\ &= P[2\lambda_1 T < 2\lambda_1 S_\alpha | 2\lambda_1 T = U \sim \chi_{2n}^2] \\ &= \boxed{\Phi_{2n}(2\lambda_1 S_\alpha)}\end{aligned}$$

Les courbes COR sont alors définies par

$$PD = 1 - \beta = \Phi_{2n}(2\lambda_1 S_\alpha)$$

c'es-à-dire

$$\boxed{PD = \Phi_{2n}\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_0} \Phi_{2n}^{-1}(\alpha)\right)}$$

On voit donc que PD est une fonction croissante de $\frac{\lambda_1}{\lambda_0}$ ce qui est normal.

4) On a $K = \sum_{j=1}^n K_j$ avec

$$K_j = \begin{cases} 1 & \text{si } X_j > \frac{2}{\lambda_0 + \lambda_1} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On sait alors que $\boxed{K \text{ suit une loi binomiale } B(n, P)}$ avec $P = P\left[X_j > \frac{2}{\lambda_0 + \lambda_1}\right]$, i.e.

$$P = \int_{\frac{2}{\lambda_0 + \lambda_1}}^{+\infty} \lambda e^{-\lambda u} du = [-e^{-\lambda u}]_{\frac{2}{\lambda_0 + \lambda_1}}^{+\infty} = \exp\left(-\frac{2\lambda}{\lambda_0 + \lambda_1}\right)$$

Donc, en notant $P_0 = \exp\left(-\frac{2\lambda_0}{\lambda_0 + \lambda_1}\right)$ et $P_1 = \exp\left(-\frac{2\lambda_1}{\lambda_0 + \lambda_1}\right)$, on a

$$\text{sous } H_0 : K \sim B(n, P_0)$$

$$\text{sous } H_1 : K \sim B(n, P_1)$$

Le théorème de la limite centrale nous permet d'approcher, pour n "grand", la loi de $K = \sum_{j=1}^n K_j$ par une loi normale

$$\boxed{\mathcal{N}(nP, nP(1-P))}$$

Pour $\alpha = 0.01$, on a alors :

$$\begin{aligned}\alpha &= 0.01 = P[\text{rejeter } H_0 | H_0 \text{ vraie}] \\ &= P[K < \mu_\alpha | K \sim \mathcal{N}(nP_0, nP_0(1-P_0))]\end{aligned}$$

avec $P_0 = \exp\left(-\frac{2\lambda_0}{\lambda_0 + \lambda_1}\right) = \exp\left(-\frac{2}{3}\right) \approx 0.51$. On en déduit :

$$0.01 = P \left[\frac{K - nP_0}{\sqrt{nP_0(1 - P_0)}} < \frac{\mu_\alpha - nP_0}{\sqrt{nP_0(1 - P_0)}} \mid \frac{K - nP_0}{\sqrt{nP_0(1 - P_0)}} \sim \mathcal{N}(0, 1) \right]$$

Les tables donnent finalement

$$\frac{-\mu_\alpha + nP_0}{\sqrt{nP_0(1 - P_0)}} \approx 2.33$$

d'où

$$\mu_\alpha \approx nP_0 - 2.33\sqrt{nP_0(1 - P_0)}$$

Pour $n = 100$, on obtient

$$\boxed{\mu_\alpha \approx 39.7}$$

Puisque $K = 52 > \mu_\alpha$, $\boxed{\text{on accepte l'hypothèse } H_0 \text{ avec le risque } \alpha = 0.01}$.