Table des Matières

Chapitre 1

Chaînes de Markov à temps discret

1 Introduction

1.1 Définition

Une suite de variables aléatoires $X = \{x_n, n = 0, 1, ...\}$ prenant ses valeurs dans un espace d'état noté $E = \{0, 1, ..., i, ...\}$ (fini ou dénombrable) est une chaîne de Markov si la propriété suivante (appelée **propriété de Markov**) est vérifiée

$$P\left[x_{n+1} = j \mid x_n = i, x_{n-1} = i_{n-1}, ..., x_0 = i_0\right] = P\left[x_{n+1} = j \mid x_n = i\right]$$

pour tout entier n et pour tout ensemble $(i, j, i_{n-1}, ..., i_1, i_0)$ d'éléments de E.
Remarque : Analogie avec une chaîne de Markov à temps continu

$$P\left[x(t_n) \leq x_n \mid x(t), t \leq t_{n-1}\right] = P\left[x(t_n) \leq x_n \mid x(t_{n-1})\right]$$

Exemple : **Marche aléatoire** (Gain dans un jeu,...)

$$x_{n+1} = x_n + g_n$$

Exemple : Canal de communication binaire

$$\begin{aligned} P\left[x_{n+1} = 1 \mid x_n = 0\right] &= \alpha, P\left[x_{n+1} = 0 \mid x_n = 0\right] = 1 - \alpha \\ P\left[x_{n+1} = 1 \mid x_n = 1\right] &= 1 - \beta, P\left[x_{n+1} = 0 \mid x_n = 1\right] = \beta \end{aligned}$$

1.2 Probabilité et matrice de transition

On définit pour une chaîne de Markov, la **probabilité de transition** de l'état i vers l'état j par

$$p_{ij}(m,n) = P\left[x_n = j \middle| x_m = i\right].$$

Il est habituel de ranger ces probabilités dans une **matrice de transition**

$$\mathbf{P}(m,n) = \begin{pmatrix} p_{00}(m,n) & p_{01}(m,n) & \dots & p_{0j}(m,n) & \dots \\ p_{10}(m,n) & p_{11}(m,n) & \dots & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ p_{i0}(m,n) & \dots & \dots & p_{ij}(m,n) & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

1.3 Chaîne de Markov homogène

On dira que la chaîne de Markov est **homogène** si $p_{ij}(m,n)$ ne dépend que de $n-m$. Dans ce cas, il est habituel de noter la matrice de transition à un pas

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} p_{00} & p_{01} & \dots & p_{0j} & \dots \\ p_{10} & p_{11} & \dots & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ p_{i0} & \dots & \dots & p_{ij} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

qui contient les probabilités associées à $n-m=1$. La chaîne est alors parfaitement définie par cette matrice et par les probabilités initiales

$$p_k(0) = P\left[x_0 = k\right]$$

2 Propriétés

2.1 Matrice stochastique

$\mathbf{P}(m,n)$ est une matrice d'éléments positifs ou nuls telle que

$$\sum_j p_{ij}(m,n) = \sum_j P\left[x_n = j \middle| x_m = i\right] = 1.$$

En d'autres termes, la somme des éléments de chaque ligne est égale à 1. Une telle matrice est appelée **matrice stochastique.** Il est assez facile de démontrer qu'une matrice stochastique admet nécessairement $\lambda = 1$ comme **valeur propre**.

2.2 Équations de Chapman-Kolmogorov

Les **équations de Chapman Kolmogorov** sont définies par

$$\begin{aligned}
p_{ij}(m,n) &= \sum_k p_{ik}(m,r)p_{kj}(r,n), \qquad m<r<n \\
&\text{i.e.} \\
\mathbf{P}(m,n) &= \mathbf{P}(m,r)\mathbf{P}(r,n) \\
&= \mathbf{P}(m,m+1)\mathbf{P}(m+1,m+2)...\mathbf{P}(n-1,n)
\end{aligned}$$

Preuve :

$$\begin{aligned}
p_{ij}(m,n) &= P\left[x_n=j|\, x_m=i\right] \\
&= \frac{P\left[x_n=j, x_m=i\right]}{P\left[x_m=i\right]} \\
&= \frac{1}{P\left[x_m=i\right]}\sum_k P\left[x_n=j, x_r=k, x_m=i\right] \\
&= \frac{1}{P\left[x_m=i\right]}\sum_k P\left[x_n=j\,|x_r=k, x_m=i\right]P\left[x_r=k\,|x_m=i\right]P\left[x_m=i\right] \\
&= \sum_k p_{ik}(m,r)p_{ik}(m,r)
\end{aligned}$$

Cas particulier d'une chaîne homogène

$$\mathbf{P}(m,n)=\mathbf{P}^{n-m} \text{ ou } \mathbf{P}\left(0,n\right)=\mathbf{P}^n$$

i.e. $\mathbf{P}$ est la matrice des transitions à un pas, $\mathbf{P}^2$ est la matrice de transition à deux pas, ...On peut en déduire les relations suivantes

$$\begin{aligned}
p_{ij}^{(n+1)} &= \sum_k p_{ik}p_{kj}^{(n)}=\sum_k p_{ik}^{(n)}p_{kj} \\
&\text{i.e.} \\
\mathbf{P}(0,n+1) &= \mathbf{P}^{n+1}=\mathbf{P}(0,n)\mathbf{P}(n,n+1)=\mathbf{P}^n\mathbf{P} \\
&\text{ou plus généralement} \\
\mathbf{P}(0,n+m) &= \mathbf{P}^{n+m}=\mathbf{P}(0,n)\mathbf{P}(n,n+m)=\mathbf{P}^n\mathbf{P}^m
\end{aligned}$$

où $p_{ij}^{(n)}$ désigne l'élément $i\times j$ de la matrice $\mathbf{P}^n$.

2.3 Loi de x_n

$$\begin{aligned}
p_j(n) &= P\left[x_n = j\right] \\
&= \sum_k P\left[x_m = k, x_n = j\right] \\
&= \sum_k P\left[x_n = j \middle|\, x_m = k\right] P\left[x_m = k\right] \\
&= \sum_k p_{kj}(m,n) p_k(m)
\end{aligned}$$

En notant $\mathbf{q}(n) = [p_0(n), p_1(n), ..., p_j(n), ...]$, on en déduit

$$\mathbf{q}(n) = \mathbf{q}(m)\mathbf{P}(m,n)$$

c'est-à-dire pour une chaîne homogène

$$\mathbf{q}(n) = \mathbf{q}(n-1)\mathbf{P} = \mathbf{q}(0)\mathbf{P}^n$$

qui montre bien que la chaîne est entièrement caractérisée par $\mathbf{q}(0)$ et par la matrice de transition $\mathbf{P}$.

3 Distributions stationnaires et limites pour les chaînes de Markov homogènes

3.1 Définitions

- **Distribution stationnaire** : $\pi = (\pi_1, ..., \pi_k, ...)$ est une distribution stationnaire par rapport à la matrice de transition $\mathbf{P}$ si et ssi

  $$\pi = \pi\mathbf{P}$$

  Chaîne stationnarisée : si le vecteur $\mathbf{q}(n)$ est égal à π pour $n = n_0$, alors on a $\mathbf{q}(n) = \pi$ pour tout $n \geq n_0$. On dit qu'on est dans l'état stationnaire de la chaîne de Markov ou que la chaîne est stationnarisée.

- **Distribution limite** : on dit qu'une chaîne de Markov converge vers π ou possède la distribution limite π si

  $$\lim_{n\to\infty} \mathbf{q}(n) = \pi$$

  (ou de manière équivalente $\lim_{n\to\infty} p_k(n) = \pi_k$ pour tout k), indépendamment de la loi initiale de $\mathbf{q}(0)$ et si π est une loi de probabilité. La convergence d'une chaîne de Markov est une propriété qui ne dépend que de la matrice de transition $\mathbf{P}$.

Remarque : si π est la distribution limite d'une chaîne de Markov homogène, en utilisant la propriété $\mathbf{q}(n) = \mathbf{q}(n-1)\mathbf{P}$ et en faisant tendre $n \to \infty$, on obtient $\pi = \pi\mathbf{P}$ donc π est une distribution stationnaire par rapport à la matrice de transition $\mathbf{P}$. La réciproque est évidemment fausse comme le montre le contre-exemple suivant :

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Remarque : on a

$$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)\mathbf{P} = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

donc $\pi = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ est stationnaire par rapport à $\mathbf{P}$. Mais

$$\begin{aligned} (a, 1-a)\,\mathbf{P} &= (1-a, a) \\ (1-a, a)\,\mathbf{P} &= (a, 1-a) \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} \mathbf{q}(2k) &= (a, 1-a)\,\mathbf{P}^{2k} = (a, 1-a) \\ \mathbf{q}(2k+1) &= (a, 1-a)\,\mathbf{P}^{2k+1} = (1-a, a) \end{aligned}$$

ce qui montre que la chaîne ne converge pas pour la distribution intiale $(a, 1-a)$ avec $a \neq \frac{1}{2}$.

3.2 Propriétés

Existence des distributions stationnaires

Théorème : Pour une chaîne de Markov **finie**, il existe toujours **au moins** une distribution stationnaire. Mais une chaîne de Markov finie n'admet pas toujours une unique distribution stationnaire. Par exemple, la chaîne de Markov de matrice de transition

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

admet une infinité de distributions stationnaires définies par

$$(0, 1-2\alpha, \alpha, \alpha)$$

avec $0 \leq \alpha \leq 1/2$.

Théorème : Une chaîne de Markov **finie** admet une unique distribution stationnaire si et seulement si elle comprend une seule classe récurrente. Pour appliquer ce théorème, il faut donc s'attaquer à la classification des états, ce que nous ne ferons pas dans ce cours.
Remarque : Une chaîne de Markov **infinie** n'admet pas toujours de distribution stationnaire. Par exemple, la chaîne de Markov à valeurs dans $\mathbb{N}$ qui à i associe $i+1$ avec probabilité 1, i.e., qui possède la matrice de transition

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

n'admet pas de loi stationnaire

Recherche des distributions stationnaires

On résoud le système

$$\begin{aligned} \pi &= \pi\mathbf{P} \\ \sum_k \pi_k &= 1 \end{aligned}$$

3.3 Théorème fondamental sur l'existence de distributions limites pour les chaînes de Markov homogènes

Hypothèse

On suppose que la chaîne de Markov est **finie** (l états) et qu'il existe des entiers k_0, n_0 et un réel $\delta > 0$ tels que

$$p_{ik_0}^{(n_0)} \geq \delta > 0, \qquad i = 0, ..., l-1,$$

où $p_{ik_0}^{(n_0)}$ désigne l'élément situé à la ligne i et à la colonne k_0 dans la matrice $\mathbf{P}^{n_0}$ (la condition signifie queles éléments de la colonne k_0 de $\mathbf{P}^{n_0}$ sont bornés inférieurement par δ).

Conclusions

- Il existe $q_0, ..., q_{l-1}$ tels que

$$\lim_{n\to\infty} p_{jk}^{(n)} = \pi_k, \qquad j = 0, ..., l-1$$

ou

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}^n = \begin{pmatrix} \pi_0 & \pi_1 & \cdots & \pi_{l-1} \\ \pi_0 & \pi_1 & \cdots & \pi_{l-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \pi_0 & \pi_1 & \cdots & \pi_{l-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\pi} \\ \vdots \\ \boldsymbol{\pi} \end{pmatrix}$$

- $$\lim_{n\to\infty} \mathbf{q}(n) = \lim_{n\to\infty} \mathbf{q}(0)\mathbf{P}^n = \boldsymbol{\pi} = (\pi_0, ..., \pi_{l-1})$$

  On notera que la limite $\boldsymbol{\pi}$ ne dépend pas de la condition intiale $\mathbf{q}(0)$.

- $\boldsymbol{\pi}$ est l'unique solution de

$$\boldsymbol{\pi} = \boldsymbol{\pi}\mathbf{P} \text{ avec } \sum_{k=0}^{l-1} \pi_k = 1$$

- $$\|\mathbf{P}^n - \mathbf{P}^\infty\| = \sup_{j,k} \left| p_{jk}^{(n)} - \pi_k \right| \leq (1 - s\delta)^{\frac{n}{n_0}-1}$$

  où s est le nombre de colonnes de $\mathbf{P}^{n_0}$ vérifiant l'hypothèse du théorème.

Remarque : ce théorème est démontré dans le livre de B. Lacaze intitulé "Processus aléatoires pour communications numériques" page 181. Un théorème plus classique est le théorème de Perron-Frobenius qui indique que pour une matrice stochastique $\mathbf{A}$ finie strictement positive (tous ses éléments sont strictement positifs), la matrice $\mathbf{A}^n$ tend lorsque n tend vers ∞ vers une matrice $\mathbf{L}$ de rang 1 qui s'écrit

$$L = \begin{pmatrix} \pi_0 & \pi_1 & \cdots & \pi_{l-1} \\ \pi_0 & \pi_1 & \cdots & \pi_{l-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \pi_0 & \pi_1 & \cdots & \pi_{l-1} \end{pmatrix}$$

avec $\pi_0 + \pi_1 + ... + \pi_{l-1} = 1$. Les résultats de ce théorème sont valables si l'on suppose qu'une certaine puissance $\mathbf{A}^r$ est strictement positive.
Remarque sur l'existence d'une distribution limite **:** si la valeur propre $\lambda = 1$ de $\mathbf{P}$ est simple et si toutes ses autres valeurs propres sont de module strictement inférieur à 1, alors l'existence et l'unicité d'une distribution limite est asssurée. On a de plus

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \mathbf{P}^n &= \begin{pmatrix} \boldsymbol{\pi} \\ \vdots \\ \boldsymbol{\pi} \end{pmatrix} \\ \lim_{n\to\infty} \mathbf{q}(n) &= \boldsymbol{\pi} \end{aligned}$$

Remarque **: l'existence d'une loi limite (indépendante de $\mathbf{q}(0)$) est uniquement liée à la forme de la matrice de transition de la chaîne de Markov.** Plus précisément, $\mathbf{q}(n)$ tend vers une limite $\boldsymbol{\pi}$ indépendamment de $\mathbf{q}(0)$ si et seulement la suite des puissances de la matrice de transition de la chaîne de Markov (la suite des matrices $\mathbf{P}^n$) converge vers une matrice (stochastique) $\mathbf{P}^*$ dont toutes les lignes sont égales entre elles. De plus, chaque ligne de $\mathbf{P}^*$ est égale à $\boldsymbol{\pi}$.

- $\boxed{\Longrightarrow}$ Si $\lim_{n\to\infty} \mathbf{q}(n) = \lim_{n\to\infty} \mathbf{q}(0)\mathbf{P}^n = \boldsymbol{\pi}$ pour tout $\mathbf{q}(0)$, alors en prenant $\mathbf{q}(0) = (1, 0, ..., 0)$, on obtient

$$\lim_{n\to\infty} (1, 0, ..., 0)\mathbf{P}^n = (1, 0, ..., 0) \lim_{n\to\infty} \mathbf{P}^n = l_1^* = \boldsymbol{\pi}$$

où l_1^* est la première ligne de P^*. De même, pour $\mathbf{q}(0) = (0, ..., 0, 1, 0, ..., 0)$, on a

$$\lim_{n\to\infty} (0, ..., 0, 1, 0, ..., 0), \mathbf{P}^n = (0, ..., 0, 1, 0, ..., 0), \lim_{n\to\infty} \mathbf{P}^n = l_i^* = \boldsymbol{\pi}$$

On en déduit que la suite des matrices $\mathbf{P}^n$ converge vers une matrice dont toutes les lignes sont égales à $\boldsymbol{\pi}$.

- $\boxed{\Longleftarrow}$ Inversement, si $\mathbf{P}^* = \lim_{n\to\infty} \mathbf{P}^n$ existe et que

$$\mathbf{P}^* = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\pi} \\ \vdots \\ \boldsymbol{\pi} \end{pmatrix}$$

alors

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{q}(n) = \lim_{n\to\infty} \mathbf{q}(0)\mathbf{P}^n = \mathbf{q}(0) \begin{pmatrix} \boldsymbol{\pi} \\ \vdots \\ \boldsymbol{\pi} \end{pmatrix} = \boldsymbol{\pi}$$

Remarque : lorsque $\lim_{n\to\infty} \mathbf{q}(n)$ dépend de $\mathbf{q}(0)$, la matrice $\mathbf{P}^n$ peut converger vers une matrice dont les lignes ne sont pas identiques. Par exemple, la matrice

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ C & D \end{pmatrix}$$

converge vers

$$\mathbf{P}^{\infty}=\begin{pmatrix} I & 0 \\ C^{\infty} & D^{\infty} \end{pmatrix} = \lim_{n\to\infty} \begin{pmatrix} I & 0 \\ C_n & D^n \end{pmatrix}$$

avec

$$\begin{aligned} C_n &= C + DC + ... + D^{n-1} = (I-D)^{-1}(I-D^n)\,C \\ D^n &= P\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2^n} \end{pmatrix} P^{-1} \end{aligned}$$

One en déduit

$$\mathbf{P}^{\infty} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ (I-D)^{-1}C & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{4}{9} & \frac{5}{9} & 0 & 0 \\ \frac{2}{9} & \frac{7}{9} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Par exemple, la probabilité d'atteindre le premier état absorbant en partant du 3ème état est $\frac{4}{9}$. De plus, on a

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \mathbf{q}(n) &= \lim_{n\to\infty} \mathbf{q}(0)\mathbf{P}^n \\ &= \mathbf{q}(0)\mathbf{P}^{\infty} \\ &= \left(a + \frac{4}{9}c + \frac{2}{9}d, b + \frac{5}{9}c + \frac{7}{9}d\right) \end{aligned}$$

avec $\mathbf{q}(0) = (a, b, c, d)$. On voit que la limite de $\mathbf{q}(n)$ dépend des probabilités initiales $\mathbf{q}(0)$.

4 Exemple 1

On considère la matrice de transition

$$P = \begin{pmatrix} 1-a & 0 & a & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} & 0 \end{pmatrix}$$

d'une chaîne de Markov prenant ses valeurs dans l'ensemble $\{0,1,2,3\}$ avec $a \in [0,1]$.

1) **Recherche des solutions stationnaires**

On cherche les solutions de

$$\left\{ \begin{array}{c} \pi = \pi P \\ \sum_{k=0}^{3} \pi_k = 1 \end{array} \right. \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \pi_0 = (1-a)\pi_0 + \frac{1}{3}\pi_1 + \frac{1}{3}\pi_3 \\ \pi_1 = \frac{1}{3}\pi_2 \\ \pi_2 = a\pi_0 + \frac{2}{3}\pi_1 + \frac{2}{3}\pi_3 \\ \pi_3 = \frac{2}{3}\pi_2 \\ \sum_{k=0}^{3} \pi_k = 1 \end{array} \right.$$

Les équations 1) et 3) sont identiques d'où

$$\left\{ \begin{array}{c} \pi_1 = \frac{1}{3}\pi_2 \\ \pi_3 = \frac{2}{3}\pi_2 \\ a\pi_0 = \pi_2 - \frac{2}{3}\pi_1 - \frac{2}{3}\pi_3 = \frac{1}{3}\pi_2 \\ \sum_{k=0}^{3} \pi_k = 1 \end{array} \right.$$

On en déduit

$$\pi_2 = 3a\pi_0, \pi_1 = a\pi_0, \pi_3 = 2a\pi_0$$

La dernière relation donne alors

$$\pi_0(1 + a + 3a + 2a) = 1 \Rightarrow \pi_0\,(1 + 6a) = 1$$

Par conséquent, la seule distribution stationnaire est

$$\pi = \left(\frac{1}{1+6a}, \frac{a}{1+6a}, \frac{3a}{1+6a}, \frac{2a}{1+6a} \right)$$

On notera que $a \in [0,1]$ et donc nécessairement $a \neq -\frac{1}{6}$.

2) **Pour $a = \frac{1}{4}$, calculer n tel que $\|P^n - P^\infty\| \leq 10^{-2}$**
On applique le théorème mais comme pour $n_0 = 1$, toutes les colonnes possèdent au moins un 0, on essaie avec $n_0 = 2$. On obtient alors

$$P^2 = \begin{pmatrix} \frac{9}{16} & \frac{1}{12} & \frac{3}{16} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{4} & \frac{2}{9} & \frac{1}{12} & \frac{4}{9} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{2}{9} & \frac{1}{12} & \frac{4}{9} \end{pmatrix}$$

On voit donc que les hypothèses du théorème sont vérifiées avec

$$\begin{aligned} \delta &= \frac{1}{4} \text{ pour la colonne 1, i.e. } s = 1 \\ \delta &= \frac{1}{12} \text{ pour les colonnes 1 et 3, i.e. } s = 2 \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} \|\mathbf{P}^n - \mathbf{P}^\infty\| &\leq \left(1 - \frac{1}{4}\right)^{\frac{n}{2}-1} = \left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{n}{2}-1} \\ &\text{et} \\ \|\mathbf{P}^n - \mathbf{P}^\infty\| &\leq \left(1 - \frac{1}{6}\right)^{\frac{n}{2}-1} = \left(\frac{5}{6}\right)^{\frac{n}{2}-1} \end{aligned}$$

La première inégalité va conduire à la plus petite valeur de n définie par

$$\begin{aligned} \left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{n}{2}-1} &\leq 10^{-2} \Leftrightarrow \left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{n}{2}} \leq \frac{3}{4}10^{-2} \\ &\Leftrightarrow \frac{n}{2}\log_{10}\left(\frac{3}{4}\right) \leq \log_{10}\left(\frac{3}{4}\right) - 2 \\ &\Leftrightarrow n \geq 2 - \frac{4}{\log_{10}\left(\frac{3}{4}\right)} \simeq 34.02 \end{aligned}$$

d'où

$$n \geq 35$$

3) **Soit $a = 0$ et $q(0) = (0, 0, 0, 1)$. Déterminer la loi du temps d'absorption T ainsi que sa moyenne $E[T]$.**

Pour $a = 0$, on a

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} & 0 \end{pmatrix}$$

et donc la chaîne possède un unique état absorbant qui est le premier état."0". Le temps d'absorption est tel que

$$\begin{aligned}
P\left[T=n\right] &= P\left[x_n=0,x_{n-1}\neq 0\right] \\
&= P\left[x_n=0,x_{n-1}=1\right]+P\left[x_n=0,x_{n-1}=2\right]+P\left[x_n=0,x_{n-1}=3\right] \\
&= P\left[|x_n=0\ x_{n-1}=1\right]P\left[x_{n-1}=1\right]+P\left[|x_n=0\ x_{n-1}=2\right]P\left[x_{n-1}=2\right] \\
&\quad +P\left[|x_n=0\ x_{n-1}=3\right]P\left[x_{n-1}=3\right] \\
&= \frac{1}{3}P\left[x_{n-1}=1\right]+0\times P\left[x_{n-1}=2\right]+\frac{1}{3}P\left[x_{n-1}=3\right] \\
&= \frac{1}{3}P\left[x_{n-1}=1\right]+\frac{1}{3}P\left[x_{n-1}=3\right]
\end{aligned}$$

On voit donc qu'il faut calculer les probabilités d'occupation des états contenues dans $q(n-1)$. Il est classique de décomposer la matrice P sous la forme d'une matrice par blocs telle que

$$P=\begin{pmatrix} I & 0 \\ C & D \end{pmatrix}$$

avec ici

$$I=(1),C=\begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ 0 \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix},D=\begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 \end{pmatrix}$$

Des calculs élémentaires permettent d'obtenir par récurrence

$$P^n=\begin{pmatrix} I & 0 \\ \left(I+D+...+D^{n-1}\right)C & D^n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} I & 0 \\ \left(I-D^n\right)\left(I-D\right)^{-1}C & D^n \end{pmatrix}$$

Calcul de D^n

Les valeurs propres de D sont les solutions de

$$\begin{aligned}
|D-\lambda I| &= 0\Leftrightarrow\begin{vmatrix} -\lambda & \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & -\lambda & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{2}{3} & -\lambda \end{vmatrix}=0 \\
&\Leftrightarrow -\lambda\left(\lambda^2-\frac{4}{9}\right)-\frac{1}{3}\left(-\frac{2}{3}\lambda\right)=0 \\
&\Leftrightarrow \lambda\left(-\lambda^2+\frac{6}{9}\right)=0 \\
&\Leftrightarrow -\lambda\left(\lambda-\frac{\sqrt{6}}{3}\right)\left(\lambda+\frac{\sqrt{6}}{3}\right)=0
\end{aligned}$$

On en déduit

$$D^n = P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right)^n & 0 \\ 0 & 0 & \left(-\frac{\sqrt{6}}{3}\right)^n \end{pmatrix} P^{-1} = M \left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right)^n + N \left(-\frac{\sqrt{6}}{3}\right)^n$$

Mais $q(0) = (0,0,0,1)$ donc

$$\begin{aligned} q(n-1) &= q(0)P^{n-1} \\ &= (0,0,0,1) \begin{pmatrix} I & 0 \\ \left(I - D^{n-1}\right)(I-D)^{-1} C & D^{n-1} \end{pmatrix} \\ &= \left(P\left[x_{n-1}=0\right], P\left[x_{n-1}=1\right], P\left[x_{n-1}=2\right], P\left[x_{n-1}=3\right]\right) \end{aligned}$$

Les deux probabilités recherchées $P\left[x_{n-1}=1\right]$ et $P\left[x_{n-1}=3\right]$ sont donc sur la dernière ligne de D^{n-1}. Ces probabilités sont donc de la forme

$$\begin{aligned} P\left[x_{n-1}=1\right] &= a_1 \left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right)^{n-1} + b_1 \left(-\frac{\sqrt{6}}{3}\right)^{n-1} \\ P\left[x_{n-1}=3\right] &= a_3 \left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right)^{n-1} + b_3 \left(-\frac{\sqrt{6}}{3}\right)^{n-1} \end{aligned}$$

En remplaçant dans $P[T=n]$, on obtient

$$\begin{aligned} P[T=n] &= \frac{1}{3} P\left[x_{n-1}=1\right] + \frac{1}{3} P\left[x_{n-1}=3\right] \\ &= A \left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right)^{n-1} + B \left(-\frac{\sqrt{6}}{3}\right)^{n-1} \end{aligned}$$

Pour déterminer$A$ et B, il suffit de déterminer des cas particuliers associés à certaines valeurs de n, par exemple $P[T=1]$ et $P[T=2]$. On a alors

$$\begin{aligned} P[T=1] &= A + B \\ P[T=2] &= A\left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right) - B\left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right) \end{aligned}$$

Mais $P[T=1] = P[x_1 = 0]$ est le premier élément de

$$\begin{aligned} q(1) &= q(0)P \\ &= (0,0,0,1) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} & 0 \end{pmatrix} \\ &= \left(\frac{1}{3}, 0, \frac{2}{3}, 0\right) \end{aligned}$$

d'où

$$A+B=\frac{1}{3}$$

De la même façon

$$\begin{aligned}
q(2) &= q(1)P \\
&= \left(\frac{1}{3},0,\frac{2}{3},0\right)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} & 0 \end{pmatrix} \\
&= \left(\frac{1}{3},\frac{2}{9},0,\frac{4}{9}\right)
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
P\left[T=2\right] &= P\left[x_2=0,x_1=1\right]+P\left[x_2=0,x_1=2\right]+P\left[x_2=0,x_1=3\right] \\
&= P\left[x_2=0\left|x_1=1\right.\right]P\left[x_1=1\right]+P\left[x_2=0\left|x_1=2\right.\right]P\left[x_1=2\right] \\
&\quad +P\left[x_2=0\left|x_1=3\right.\right]P\left[x_1=3\right] \\
&= \frac{1}{3}\times 0+0\times\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\times 0=0
\end{aligned}$$

On a donc

$$A=B$$

d'où

$$A=B=\frac{1}{6}$$

c'est-à-dire

$$P\left[T=n\right]=\frac{1}{6}\left[\left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right)^{n-1}+\left(-\frac{\sqrt{6}}{3}\right)^{n-1}\right]$$

ce qui peut s'écrire

$$\left\{\begin{array}{c} P\left[T=2k\right]=0 \\ P\left[T=2k+1\right]=\frac{1}{3}\left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right)^{2k} \end{array}\right.$$

pour $k\in\mathbb{N}$. La moyenne de T est alors

$$E\left[T\right]=\frac{1}{3}\sum_{k=0}^{\infty}(2k+1)\left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right)^{2k}$$

En utilisant

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^{2k+1} = \frac{x}{1-x^2} \Longrightarrow \sum_{k=0}^{\infty} (2k+1)\, x^{2k} = \frac{1+x^2}{\left(1-x^2\right)^2}$$

il vient

$$E\left[T\right] = 5$$

5 Exemple 2

Cet exemple est issu du partiel du 2 septembre 2005 dans lequel on considérait une chaîne de Markov prenant les valeurs $-1, 0$ et 1 avec la matrice de transition

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

1) *Déterminer* A^∞

Les distributions stationnaires de la matrice A vérifient

$$\left\{ \begin{array}{c} \pi = \pi A \\ \pi_{-1} + \pi_0 + \pi_1 = 1 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{c} \pi_{-1} = \frac{1}{3}\pi_0 + \frac{1}{2}\pi_1 \\ \pi_0 = \frac{1}{2}\pi_{-1} + \frac{1}{3}\pi_0 + \frac{1}{2}\pi \\ \pi_1 = \frac{1}{2}\pi_{-1} + \frac{1}{3}\pi_0 \\ \pi_{-1} + \pi_0 + \pi_1 = 1 \end{array} \right.$$

Ce système se résoud de manière élémentaire et conduit à

$$\pi_{-1} = \pi_1 = \frac{2}{7} \text{ et } \pi_0 = \frac{3}{7}$$

En regardant la deuxième colonne de la matrice A, on voit qu'on peut appliquer le théorème de cours. En conséquence

$$A^\infty = \begin{pmatrix} \pi \\ \pi \\ \pi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{7} & \frac{3}{7} & \frac{2}{7} \\ \frac{2}{7} & \frac{3}{7} & \frac{2}{7} \\ \frac{2}{7} & \frac{3}{7} & \frac{2}{7} \end{pmatrix}$$

2) *On suppose que la chaîne de Markov est stationnaire. En déduire* $P[x_n = -1], P[x_n = 0]$ *et* $P[x_n = 1]$. *Calculer ensuite* $E[x_n], E[x_n^2]$ *et* $E[x_n x_{n+1}]$.

Puisque la chaîne de Markov est stationnaire, on a atteint l'état stationnaire π, d'où

$$P[x_n = -1] = \frac{2}{7}, P[x_n = 0] = \frac{3}{7} \text{ et } P[x_n = 1] = \frac{2}{7}$$

On a donc

$$\begin{aligned} E[x_n] &= (-1) \times \frac{2}{7} + 0 \times \frac{3}{7} + 1 \times \frac{2}{7} = 0 \\ E[x_n^2] &= (-1)^2 \times \frac{2}{7} + 0^2 \times \frac{3}{7} + 1^2 \times \frac{2}{7} = \frac{4}{7} \end{aligned}$$

De plus

$$\begin{aligned}
E\left[x_n x_{n+1}\right] &= 1\times P\left[x_n x_{n+1}=1\right]+0\times P\left[x_n x_{n+1}=0\right]\\
&\quad +(-1)\times P\left[x_n x_{n+1}=-1\right]\\
&= P\left[x_n x_{n+1}=1\right]-P\left[x_n x_{n+1}=-1\right]\\
&= A_{11}P\left[x_n=1\right]+A_{-1-1}P\left[x_n=-1\right]\\
&\quad -A_{-11}P\left[x_n=-1\right]-A_{1-1}P\left[x_n=1\right]\\
&= A_{-11}P\left[x_n=-1\right]+A_{1-1}P\left[x_n=1\right]\ \ (A_{-1-1}=A_{11}=0)\\
&= -\frac{1}{2}\times\frac{2}{7}-\frac{1}{2}\times\frac{2}{7}\\
&= -\frac{2}{7}
\end{aligned}$$

3) *En utilisant l'existence de* A^{∞}*, en déduire*

$$\lim_{n\to\infty} E\left[x_m x_{n+m}\right]$$

On a

$$\begin{aligned}
E\left[x_m x_{n+m}\right] &= P\left[x_m x_{n+m}=1\right]-P\left[x_m x_{n+m}=-1\right]\\
&= A_{11}^{(n)}P\left[x_m=1\right]+A_{-1-1}^{(n)}P\left[x_m=-1\right]\\
&\quad -A_{-11}^{(n)}P\left[x_m=-1\right]-A_{1-1}^{(n)}P\left[x_m=1\right]\\
&= \frac{2}{7}A_{11}^{(n)}+\frac{2}{7}A_{-1-1}^{(n)}-\frac{2}{7}A_{-11}^{(n)}-\frac{2}{7}A_{1-1}^{(n)}
\end{aligned}$$

où $A^{(n)}=A^n$ est la matrice contenant les matrice de transition entre x_m et x_{n+m}. Si l'existence de A^{∞} est assurée, on a

$$\lim_{n\to\infty} A^{(n)}=A^{\infty}=\begin{pmatrix}\frac{2}{7} & \frac{3}{7} & \frac{2}{7}\\ \frac{2}{7} & \frac{3}{7} & \frac{2}{7}\\ \frac{2}{7} & \frac{3}{7} & \frac{2}{7}\end{pmatrix}$$

d'où

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} E\left[x_m x_{n+m}\right] &= \lim_{n\to\infty}\frac{2}{7}\left[A_{11}^{(n)}+A_{-1-1}^{(n)}+A_{-11}^{(n)}+A_{1-1}^{(n)}\right]\\
&= \frac{2}{7}\left[\frac{2}{7}+\frac{2}{7}-\frac{2}{7}-\frac{2}{7}\right]=0.
\end{aligned}$$

6 Exemple 3

On considère une chaîne de Markov stationnaire $\mathbf{Y} = \{Y_n, n \in \mathbb{Z}\}$ à 2 états a et b avec $ab < 0$ et la matrice de transition

$$Q = \begin{pmatrix} \alpha & 1-\alpha \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

(avec par exemple $\alpha = P\left[Y_n = a \middle| Y_{n-1} = a\right]$).

1) *Calculer les probabilités d'occupation des états*

La matrice Q vérifie les hypothèses du théorème du cours, donc

$$\lim_{n\to\infty} q(n) = \pi \text{ avec } \pi Q = \pi$$

c'est-à-dire

$$\left\{\begin{array}{c} \pi = \pi Q \\ \pi_a + \pi_b = 1 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{c} \pi_a = \alpha\pi_a + \frac{1}{2}\pi_b \\ \pi_b = (1-\alpha)\,\pi_a + \frac{1}{2}\pi_b \\ \pi_a + \pi_b = 1 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{c} \pi_a\,(1-\alpha) = \frac{1}{2}\pi_b \\ \pi_a + \pi_b = 1 \end{array}\right.$$

- Si $\alpha \neq 1$, on a

$$\pi_a = \frac{1}{3-2\alpha} \text{ et } \pi_b = \frac{2\,(1-\alpha)}{3-2\alpha}$$

- Si $\alpha = 1$, on a

$$\pi_a = 1 \text{ et } \pi_b = 0$$

2) *Déterminer $a(\alpha)$ et $b(\alpha)$ de façon à avoir $E\left[Y_n\right] = 0$ et $Var[Y_n] = 1$.*

Puisqu'on est dans le régime stationnaire

$$\begin{aligned} P\left[Y_n = a\right] &= \pi_a = \frac{1}{3-2\alpha} \\ P\left[Y_n = b\right] &= \pi_b = \frac{2\,(1-\alpha)}{3-2\alpha} \end{aligned}$$

donc

$$E\left[Y_n\right] = \frac{1}{3-2\alpha}a + \frac{2\,(1-\alpha)}{3-2\alpha}b = 0$$

et

$$\mathrm{var}\left[Y_n\right] = E\left[Y_n^2\right] = \frac{1}{3-2\alpha}a^2 + \frac{2\,(1-\alpha)}{3-2\alpha}b^2 = 1$$

La résolution de ce système de deux équations à deux inconnues donne

$$\left\{ \begin{array}{c} a = \sqrt{2\left(1-\alpha\right)} \\ b = \frac{-1}{\sqrt{2(1-\alpha)}} \end{array} \right. \quad \text{ou} \quad \left\{ \begin{array}{c} a = -\sqrt{2\left(1-\alpha\right)} \\ b = \frac{1}{\sqrt{2(1-\alpha)}} \end{array} \right.$$

Par exemple, pour $\alpha = \frac{1}{4}$, on obtient

$$\left\{ \begin{array}{c} a = \frac{\sqrt{6}}{2} \\ b = -\frac{\sqrt{6}}{3} \end{array} \right. \quad \text{ou} \quad \left\{ \begin{array}{c} a = -\frac{\sqrt{6}}{2} \\ b = \frac{\sqrt{6}}{3} \end{array} \right.$$

3) *Pour $\alpha = \frac{1}{4}$ et sous les conditions déterminées dans la question prévédente*

- 3.1) *Déterminer la densité spectrale de puissance de Y_n*

  Pour $\alpha = \frac{1}{4}$, la matrice de transition est

  $$Q = \left(\begin{array}{cc} \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array} \right)$$

  et ses valeurs propres vérifient

  $$\begin{aligned} \det\left(Q-\lambda I\right) &= 0 \Longleftrightarrow \left| \begin{array}{cc} \frac{1}{4}-\lambda & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}-\lambda \end{array} \right| = 0 \\ &\Longleftrightarrow \lambda^2 - \frac{3}{4}\lambda - \frac{1}{4} = 0 \end{aligned}$$

  On sait que $\lambda = 1$ est valeur propre de Q donc on peut factoriser $\lambda - 1$ dans $\det\left(Q-\lambda I\right)$ d'où

  $$\det\left(Q-\lambda I\right) = 0 = (\lambda - 1)\left(\lambda + \frac{1}{4}\right) = 0$$

  D'après le cours, la fonction d'autocorrélation de Y s'écrit

  $$r_Y(k) = E\left[Y_n Y_{n+k}\right] = C_1 + C_2\left(-\frac{1}{4}\right)^{|k|}$$

  et donc il suffit de déterminer les constantes C_1 et C_2. Pour ce, on calcule des valeurs particulières de r, par exemple associées à $k = 0$ et $k = 1$. Pour $k = 0$

  $$\begin{aligned} r_Y(0) &= E\left[Y_n^2\right] = a^2 P\left[Y_n = a\right] + b^2 P\left[Y_n = b\right] \\ &= a^2\pi_a + b^2\pi_b \end{aligned}$$

Pour $\alpha = \frac{1}{4}$, on a $a^2 = \frac{3}{2}, b^2 = \frac{2}{3}$ et $ab = -1$. De plus,

$$\begin{aligned} \pi_a &= \frac{1}{3-2\alpha} = \frac{2}{5} \\ \pi_b &= \frac{2(1-\alpha)}{3-2\alpha} = \frac{3}{5} \end{aligned}$$

$$r(0) = \frac{3}{2} \times \frac{2}{5} + \frac{2}{3} \times \frac{3}{5} = 1$$

d'où

$$C_1 + C_2 = 1$$

De même pour $k = 1$

$$\begin{aligned} r_Y(1) &= E[Y_n Y_{n+1}] \\ &= a^2 P[Y_n = a, Y_{n+1} = a] + b^2 P[Y_n = b, Y_{n+1} = b] \\ &\quad + ab\{P[Y_n = a, Y_{n+1} = b] + P[Y_n = b, Y_{n+1} = a]\} \\ &= a^2 P[Y_{n+1} = a | Y_n = a] P[Y_n = a] + b^2 P[Y_{n+1} = b | Y_n = b] P[Y_n = b] \\ &\quad + ab\{P[Y_{n+1} = a | Y_n = b] P[Y_n = b] + P[Y_{n+1} = b | Y_n = a] P[Y_n = a]\} \\ &= \frac{3}{2} \times \frac{1}{4} \times \frac{2}{5} + \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} \times \frac{3}{5} - \left\{\frac{1}{2} \times \frac{3}{5} + \frac{3}{4} \times \frac{2}{5}\right\} \\ &= -\frac{1}{4} \end{aligned}$$

d'où le système

$$\left\{ \begin{array}{c} C_1 + C_2 = 1 \\ C_1 + C_2\left(-\frac{1}{4}\right) = -\frac{1}{4} \end{array} \right. \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} C_1 = 0 \\ C_2 = 1 \end{array} \right.$$

Finalement, la fonction d'autocorrélation de Y_n est

$$r_Y(k) = E[Y_n Y_{n+k}] = \left(-\frac{1}{4}\right)^{|k|}$$

Remarque intéressante : on peut voir directement que $C_1 = 0$ car$E[Y_n] = 0$ implique

$$\lim_{k \to \infty} r_Y(k) = 0 = C_1.$$

La densité spectrale de puissance de Y_n s'écrit alors

$$\begin{aligned}
s_Y(f) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} r_Y(k) e^{-j2\pi kf} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{4}\right)^k e^{-j2\pi kf} + \sum_{k=-\infty}^{-1} \left(-\frac{1}{4}\right)^{-k} e^{-j2\pi kf} \\
&= \frac{1}{1+\frac{1}{4}e^{-j2\pi f}} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{4}\right)^k e^{j2\pi kf} \\
&= \frac{1}{1+\frac{1}{4}e^{-j2\pi f}} - 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{4}e^{j2\pi f}}
\end{aligned}$$

c'est–à-dire

$$\begin{aligned}
s_Y(f) &= -1 + \frac{2+\frac{1}{2}\cos(2\pi f)}{\frac{17}{16}+\frac{1}{2}\cos(2\pi f)} \\
&= \frac{\frac{15}{16}}{\frac{17}{16}+\frac{1}{2}\cos(2\pi f)}
\end{aligned}$$

- 3.2) *Déterminer la densité spectrale de puissance de la suite stationnaire* **U** *telle que*

$$U_n - 4U_{n-1} + 4U_{n-2} = Y_n - 2Y_{n-1}$$

La suite **U** est obtenue par filtrage linéaire de la suite **Y** avec un filtre de transmittance

$$H(z) = \frac{1-2z^{-1}}{1-4z^{-1}+4z^{-2}} = \frac{z(z-2)}{z^2-4z+4} = \frac{z}{z-2}$$

En utilisant la relation de Wiener-Lee, on obtient

$$\begin{aligned}
s_U(f) &= s_Y(f) \left| \frac{e^{j2\pi f}}{e^{j2\pi f}-2} \right|^2 \\
&= s_Y(f) \frac{1}{5-4\cos(2\pi f)}
\end{aligned}$$

- 3.3) *Déterminer l'équation d'une suite ARMA vérifiée par* **U**

Tout d'abord, il est important de mentionner que

$$U_n - 4U_{n-1} + 4U_{n-2} = Y_n - 2Y_{n-1}$$

n'est pas l'équation d'une suite ARMA car la suite $\mathbf{Y}$ n'est pas un bruit blanc. Mais d'après ce qui précède, on sait que la densité spectrale de puissance de $\mathbf{Y}$ s'écrit

$$\begin{aligned} s_Y(f) &= \frac{\frac{15}{16}}{\frac{17}{16} + \frac{1}{2}\cos(2\pi f)} \\ &= \frac{\frac{15}{16}}{\left|1 + \frac{1}{4}e^{-j2\pi f}\right|^2} \end{aligned}$$

On voit donc que Y_n est la sortie d'un filtre linéaire d'entrée le bruit blanc $e(n)$ de variance $E\left[e^2(n)\right] = \frac{15}{16}$ et de transmittance

$$\begin{aligned} T(z) &= \frac{1}{1 + \frac{1}{4}z^{-1}} \\ &= \frac{1}{\frac{1}{4} + z^{-1}} \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} U(z) &= H(z)T(z)E(z) \\ &= \frac{1}{1 - 2z^{-1}} \frac{1}{\frac{1}{4} + z^{-1}} E(z) \end{aligned}$$

On a alors

$$\left(1 + \frac{1}{2}z^{-1} - 2z^{-2}\right) U(z) = E(z)$$

soit

$$u(n) + \frac{1}{2}u(n-1) - 2u(n-2) = e(n)$$

7 Exemple 4

On considère une chaîne de Markov stationnaire $\mathbf{X} = \{X_n, n \in \mathbb{Z}\}$ à 4 états $\{1, 2, 3, 4\}$ de matrice de transition

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 1-a & 0 & a & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

avec $0 \leq a < 1$.

1) *Déterminer les probabilités asymptotiques des états et* $E\left[X_\infty\right]$, $\mathrm{Var}[X_\infty]$.

On résoud le système

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\pi} &= \boldsymbol{\pi}\mathbf{Q} \\ \sum_{k=1}^{4} \pi_k &= 1 \end{aligned}$$

et on obtient pour $a \neq -\frac{1}{4}$

$$\boldsymbol{\pi} = (\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4) = \left(\frac{1}{1+4a}, \frac{a}{1+4a}, \frac{2a}{1+4a}, \frac{a}{1+4a}\right)$$

Pour $a = -\frac{1}{4}$, pas de solution stationnaire. Des calculs élémentaires permettent d'obtenir

$$\mathbf{Q}^2 = \begin{pmatrix} (1-a)^2 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2}(1-a) & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2}(1-a) & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

En observant la première colonne de $\mathbf{Q}^2$ et en appliquant le théorème du cours, on en déduit que la loi stationnaire $\boldsymbol{\pi}$ déterminée ci-dessus est aussi la loi limite. On a alors

$$
\begin{aligned}
E\left[X_\infty\right] &= \frac{1}{1+4a}+\frac{2a}{1+4a}+\frac{6a}{1+4a}+\frac{4a}{1+4a} \\
&= \frac{12a+1}{4a+1} \\
E\left[X_\infty^2\right] &= \frac{1}{1+4a}+\frac{4a}{1+4a}+\frac{18a}{1+4a}+\frac{16a}{1+4a} \\
&= \frac{39a+1}{4a+1} \\
\operatorname{Var}\left[X_\infty\right] &= E\left[X_\infty^2\right]-E\left[X_\infty\right]^2 \\
&= \frac{39a+1}{4a+1}-\left(\frac{12a+1}{4a+1}\right)^2 \\
&= \frac{a(12a+19)}{(4a+1)^2}
\end{aligned}
$$

2) Soit $a=0$ et $\mathbf{q}(0)=(0,0,0,1)$. *Déterminer la loi du temps d'absorption* T *puis* $E\left[T\right]$ *et* $\operatorname{Var}[T]$

La matrice $\mathbf{Q}$ s'écrit

$$
\mathbf{Q}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{pmatrix}
$$

et on montre que la matrice $\mathbf{D}$ admet trois valeurs propres $\lambda=0, \lambda=\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\lambda=-\frac{\sqrt{2}}{2}$. De plus, on a (voir exemple 1)

$$
\begin{aligned}
P\left[T=n\right] &= P\left[X_n=1, X_{n-1}\neq 1\right] \\
&= \frac{1}{2}P\left[X_{n-1}=2\right]+\frac{1}{2}P\left[X_{n-1}=4\right]
\end{aligned}
$$

Les deux probabilités recherchées sont des éléments du vecteur

$$
\mathbf{q}(n-1)=\mathbf{q}(0)\mathbf{D}^{n-1}
$$

Mais

$$
\mathbf{D}=\mathbf{P}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}\mathbf{P}^{-1}
$$

d'où

$$
\mathbf{D}^{n-1}=\mathbf{P}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n-1} \end{pmatrix}\mathbf{P}^{-1}
$$

Donc

$$\begin{aligned} P\left[X_{n-1}=2\right] &= C_{21}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n-1}+C_{22}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n-1} \\ P\left[X_{n-1}=4\right] &= C_{41}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n-1}+C_{42}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n-1} \end{aligned}$$

et finalement

$$P\left[T=n\right]=A\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n-1}+B\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n-1}$$

Les constantes A et B sé déterminent en considérant des cas particuliers pour $P\left[T=n\right]$.

- Pour $n=1$

$$P\left[T=1\right]=P\left[X_1=1\right]=\frac{1}{2}\Longrightarrow A+B=\frac{1}{2}$$

Pour $n=2$

$$\begin{aligned} P\left[T=2\right] &= P\left[X_2=1,X_1=2\right]+P\left[X_2=1,X_1=3\right]+P\left[X_2=1,X_1=4\right] \\ &= 0\Longrightarrow A=B \end{aligned}$$

On en déduit

$$P\left[T=n\right]=\frac{1}{4}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n-1}+\frac{1}{4}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n-1}$$

ou pour tout $k\in\mathbb{N}$

$$\begin{aligned} P\left[T=2k\right] &= 0 \\ P\left[T=2k+1\right] &= \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{2k} \end{aligned}$$

$E\left[T\right]$ et $\mathrm{Var}[T]$ s'en déduisent facilement (voir exemple 1).

8 Bibliographie

- Alan Ruegg, Processus Stochastiques, Presses Polytechniques et Universitaires Romandes, Méthodes mathématiques pour l'ingénieur, 1993.
- Athanasios Papoulis and S. Unnikrishna Pillai, Probability, Random Variable and Stochastic Processes, McGraw Hill Higher Education, 4th edition, 2002.
- Bruno Baynat, Théorie des files d'attente. Des Chaînes de Markov aux réseaux à forme produit, Hermes Sciences Publications, 1970.
- Bernard Lacaze, Processus aléatoires pour communications numériques, Hermes Sciences Publications, 2000.