Table des Matières

Chapitre 1

Chaînes de Markov à temps discret

1 Introduction

1.1 Définition

Une suite de variables aléatoires $X = \{x_n, n = 0, 1, ...\}$ prenant ses valeurs dans un espace d'état noté $E = \{0, 1, ..., i, ...\}$ (fini ou dénombrable) est une chaîne de Markov si la propriété suivante (appelée **propriété de Markov**) est vérifiée

$$P\left[x_{n+1} = j \middle| x_n = i, x_{n-1} = i_{n-1}, ..., x_0 = i_0\right] = P\left[x_{n+1} = j \middle| x_n = i\right]$$

pour tout entier n et pour tout ensemble $(i, j, i_{n-1}, ..., i_1, i_0)$ d'éléments de E.
Remarque : Analogie avec une chaîne de Markov à temps continu

$$P\left[x\left(t_n\right) \leq x_n \middle| x(t), t \leq t_{n-1}\right] = P\left[x\left(t_n\right) \leq x_n \middle| x(t_{n-1})\right]$$

Exemple : **Marche aléatoire** (Gain dans un jeu,...)

$$x_{n+1} = x_n + g_n$$

Exemple : Canal de communication binaire

$$\begin{aligned} P\left[x_{n+1} = 1 \middle| x_n = 0\right] &= \alpha, P\left[x_{n+1} = 0 \middle| x_n = 0\right] = 1 - \alpha \\ P\left[x_{n+1} = 1 \middle| x_n = 1\right] &= 1 - \beta, P\left[x_{n+1} = 0 \middle| x_n = 1\right] = \beta \end{aligned}$$

1.2 Probabilité et matrice de transition

On définit pour une chaîne de Markov, la **probabilité de transition** de l'état i vers l'état j par

$$p_{ij}(m,n) = P\left[x_n = j \middle| x_m = i\right].$$

Il est habituel de ranger ces probabilités dans une **matrice de transition**

$$\mathbf{P}\left(m,n\right) = \begin{pmatrix} p_{00}(m,n) & p_{01}(m,n) & \dots & p_{0j}(m,n) & \dots \\ p_{10}(m,n) & p_{11}(m,n) & \dots & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ p_{i0}(m,n) & \dots & \dots & p_{ij}(m,n) & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

1.3 Chaîne de Markov homogène

On dira que la chaîne de Markov est **homogène** si $p_{ij}(m,n)$ ne dépend que de $n-m$. Dans ce cas, il est habituel de noter la matrice de transition à un pas

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} p_{00} & p_{01} & \dots & p_{0j} & \dots \\ p_{10} & p_{11} & \dots & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ p_{i0} & \dots & \dots & p_{ij} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

qui contient les probabilités associées à $n-m=1$. La chaîne est alors parfaitement définie par cette matrice et par les probabilités initiales

$$p_k(0) = P\left[x_0 = k\right]$$

2 Propriétés

2.1 Matrice stochastique

$\mathbf{P}(m,n)$ est une matrice d'éléments positifs ou nuls telle que

$$\sum_j p_{ij}(m,n) = \sum_j P\left[x_n = j \middle| x_m = i\right] = 1.$$

En d'autres termes, la somme des éléments de chaque ligne est égale à 1. Une telle matrice est appelée **matrice stochastique.** Il est assez facile de démontrer qu'une matrice stochastique admet nécessairement $\lambda = 1$ comme **valeur propre**.

2.2 Équations de Chapman-Kolmogorov

Les **équations de Chapman Kolmogorov** sont définies par

$$
\begin{aligned}
p_{ij}(m,n) &= \sum_k p_{ik}(m,r)p_{kj}(r,n), \qquad m<r<n \\
& \text{i.e.} \\
\mathbf{P}(m,n) &= \mathbf{P}(m,r)\mathbf{P}(r,n) \\
&= \mathbf{P}(m,m+1)\mathbf{P}(m+1,m+2)...\mathbf{P}(n-1,n)
\end{aligned}
$$

Preuve :

$$
\begin{aligned}
p_{ij}(m,n) &= P\left[x_n=j|\, x_m=i\right] \\
&= \frac{P\left[x_n=j, x_m=i\right]}{P\left[x_m=i\right]} \\
&= \frac{1}{P\left[x_m=i\right]}\sum_k P\left[x_n=j, x_r=k, x_m=i\right] \\
&= \frac{1}{P\left[x_m=i\right]}\sum_k P\left[x_n=j\,|x_r=k, x_m=i\right]P\left[x_r=k\,|x_m=i\right]P\left[x_m=i\right] \\
&= \sum_k p_{ik}(m,r)p_{ik}(m,r)
\end{aligned}
$$

Cas particulier d'une chaîne homogène

$$\mathbf{P}(m,n)=\mathbf{P}^{n-m} \text{ ou } \mathbf{P}\left(0,n\right)=\mathbf{P}^n$$

i.e. $\mathbf{P}$ est la matrice des transitions à un pas, $\mathbf{P}^2$ est la matrice de transition à deux pas, ...On peut en déduire les relations suivantes

$$
\begin{aligned}
p_{ij}^{(n+1)} &= \sum_k p_{ik}p_{kj}^{(n)} = \sum_k p_{ik}^{(n)}p_{kj} \\
& \text{i.e.} \\
\mathbf{P}(0,n+1) &= \mathbf{P}^{n+1} = \mathbf{P}(0,n)\mathbf{P}(n,n+1) = \mathbf{P}^n\mathbf{P} \\
& \text{ou plus généralement} \\
\mathbf{P}(0,n+m) &= \mathbf{P}^{n+m} = \mathbf{P}(0,n)\mathbf{P}(n,n+m) = \mathbf{P}^n\mathbf{P}^m
\end{aligned}
$$

où $p_{ij}^{(n)}$ désigne l'élément $i\times j$ de la matrice $\mathbf{P}^n$.

2.3 Loi de x_n

$$\begin{aligned} p_j(n) &= P\left[x_n = j\right] \\ &= \sum_k P\left[x_m = k, x_n = j\right] \\ &= \sum_k P\left[x_n = j \middle| x_m = k\right] P\left[x_m = k\right] \\ &= \sum_k p_{kj}(m,n) p_k(m) \end{aligned}$$

En notant $\mathbf{q}(n) = [p_0(n), p_1(n), ..., p_j(n), ...]$, on en déduit

$$\mathbf{q}(n) = \mathbf{q}(m)\mathbf{P}(m,n)$$

c'est-à-dire pour une chaîne homogène

$$\mathbf{q}(n) = \mathbf{q}(n-1)\mathbf{P} = \mathbf{q}(0)\mathbf{P}^n$$

qui montre bien que la chaîne est entièrement caractérisée par $\mathbf{q}(0)$ et par la matrice de transition $\mathbf{P}$.

3 Distributions stationnaires et limites pour les chaînes de Markov homogènes

3.1 Définitions

- **Distribution stationnaire** : $\pi = (\pi_1, ..., \pi_k, ...)$ est une distribution stationnaire par rapport à la matrice de transition $\mathbf{P}$ si et ssi

  $$\pi{=}\pi\mathbf{P}$$

  Chaîne stationnarisée : si le vecteur $\mathbf{q}(n)$ est égal à π pour $n = n_0$, alors on a $\mathbf{q}(n) = \pi$ pour tout $n \geq n_0$. On dit qu'on est dans l'état stationnaire de la chaîne de Markov ou que la chaîne est stationnarisée.

- **Distribution limite** : on dit qu'une chaîne de Markov converge vers π ou possède la distribution limite π si

  $$\lim_{n\to\infty} \mathbf{q}(n) = \pi$$

  (ou de manière équivalente $\lim\limits_{n\to\infty} p_k(n) = \pi_k$ pour tout k), indépendamment de la loi initiale de $\mathbf{q}(0)$ et si π est une loi de probabilité. La convergence d'une chaîne de Markov est une propriété qui ne dépend que de la matrice de transition $\mathbf{P}$.

Remarque : si π est la distribution limite d'une chaîne de Markov homogène, en utilisant la propriété $\mathbf{q}(n) = \mathbf{q}(n-1)\mathbf{P}$ et en faisant tendre $n \to \infty$, on obtient $\pi = \pi\mathbf{P}$ donc π est une distribution stationnaire par rapport à la matrice de transition $\mathbf{P}$. La réciproque est évidemment fausse comme le montre le contre-exemple suivant :

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Remarque : on a

$$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \mathbf{P} = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

donc $\pi = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ est stationnaire par rapport à $\mathbf{P}$. Mais

$$\begin{array}{rcl} (a, 1-a)\,\mathbf{P} & = & (1-a, a) \\ (1-a, a)\,\mathbf{P} & = & (a, 1-a) \end{array}$$

d'où

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{q}(2k) & = & (a, 1-a)\,\mathbf{P}^{2k} = (a, 1-a) \\ \mathbf{q}(2k+1) & = & (a, 1-a)\,\mathbf{P}^{2k+1} = (1-a, a) \end{array}$$

ce qui montre que la chaîne ne converge pas pour la distribution intiale $(a, 1-a)$ avec $a \neq \frac{1}{2}$.

3.2 Propriétés

Existence des distributions stationnaires

Théorème : Pour une chaîne de Markov **finie**, il existe toujours **au moins** une distribution stationnaire. Mais une chaîne de Markov finie n'admet pas toujours une unique distribution stationnaire. Par exemple, la chaîne de Markov de matrice de transition

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

admet une infinité de distributions stationnaires définies par

$$(0, 1-2\alpha, \alpha, \alpha)$$

avec $0 \leq \alpha \leq 1/2$.

Théorème : Une chaîne de Markov **finie** admet une unique distribution stationnaire si et seulement si elle comprend une seule classe récurrente. Pour appliquer ce théorème, il faut donc s'attaquer à la classification des états, ce que nous ne ferons pas dans ce cours.
Remarque : Une chaîne de Markov **infinie** n'admet pas toujours de distribution stationnaire. Par exemple, la chaîne de Markov à valeurs dans $\mathbb{N}$ qui à i associe $i+1$ avec probabilité 1, i.e., qui possède la matrice de transition

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

n'admet pas de loi stationnaire

Recherche des distributions stationnaires

On résoud le système

$$\begin{aligned} \pi &= \pi\mathbf{P} \\ \sum_k \pi_k &= 1 \end{aligned}$$

3.3 Théorème fondamental sur l'existence de distributions limites pour les chaînes de Markov homogènes

Hypothèse

On suppose que la chaîne de Markov est **finie** (l états) et qu'il existe des entiers k_0, n_0 et un réel $\delta > 0$ tels que

$$p_{ik_0}^{(n_0)} \geq \delta > 0, \qquad i = 0, ..., l-1,$$

où $p_{ik_0}^{(n_0)}$ désigne l'élément situé à la ligne i et à la colonne k_0 dans la matrice $\mathbf{P}^{n_0}$ (la condition signifie queles éléments de la colonne k_0 de $\mathbf{P}^{n_0}$ sont bornés inférieurement par δ).

Conclusions

- Il existe $q_0, ..., q_{l-1}$ tels que

$$\lim_{n\to\infty} p_{jk}^{(n)} = \pi_k, \qquad j = 0, ..., l-1$$

ou

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}^n = \begin{pmatrix} \pi_0 & \pi_1 & \cdots & \pi_{l-1} \\ \pi_0 & \pi_1 & \cdots & \pi_{l-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \pi_0 & \pi_1 & \cdots & \pi_{l-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\pi} \\ \vdots \\ \boldsymbol{\pi} \end{pmatrix}$$

- $$\lim_{n\to\infty} \mathbf{q}(n) = \lim_{n\to\infty} \mathbf{q}(0)\mathbf{P}^n = \boldsymbol{\pi} = (\pi_0, ..., \pi_{l-1})$$

  On notera que la limite $\boldsymbol{\pi}$ ne dépend pas de la condition intiale $\mathbf{q}(0)$.

- $\boldsymbol{\pi}$ est l'unique solution de

$$\boldsymbol{\pi} = \boldsymbol{\pi}\mathbf{P} \text{ avec } \sum_{k=0}^{l-1} \pi_k = 1$$

- $$\|\mathbf{P}^n - \mathbf{P}^\infty\| = \sup_{j,k} \left| p_{jk}^{(n)} - \pi_k \right| \leq (1 - s\delta)^{\frac{n}{n_0}-1}$$

  où s est le nombre de colonnes de $\mathbf{P}^{n_0}$ vérifiant l'hypothèse du théorème.

Remarque : ce théorème est démontré dans le livre de B. Lacaze intitulé "Processus aléatoires pour communications numériques" page 181. Un théorème plus classique est le théorème de Perron-Frobenius qui indique que pour une matrice stochastique $\mathbf{A}$ finie strictement positive (tous ses éléments sont strictement positifs), la matrice $\mathbf{A}^n$ tend lorsque n tend vers ∞ vers une matrice $\mathbf{L}$ de rang 1 qui s'écrit

$$L = \begin{pmatrix} \pi_0 & \pi_1 & \cdots & \pi_{l-1} \\ \pi_0 & \pi_1 & \cdots & \pi_{l-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \pi_0 & \pi_1 & \cdots & \pi_{l-1} \end{pmatrix}$$

avec $\pi_0 + \pi_1 + ... + \pi_{l-1} = 1$. Les résultats de ce théorème sont valables si l'on suppose qu'une certaine puissance $\mathbf{A}^r$ est strictement positive.
Remarque sur l'existence d'une distribution limite **:** si la valeur propre $\lambda = 1$ de $\mathbf{P}$ est simple et si toutes ses autres valeurs propres sont de module strictement inférieur à 1, alors l'existence et l'unicité d'une distribution limite est asssurée. On a de plus

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \mathbf{P}^n &= \begin{pmatrix} \boldsymbol{\pi} \\ \vdots \\ \boldsymbol{\pi} \end{pmatrix} \\ \lim_{n\to\infty} \mathbf{q}(n) &= \boldsymbol{\pi} \end{aligned}$$

Remarque **: l'existence d'une loi limite (indépendante de $\mathbf{q}(0)$) est uniquement liée à la forme de la matrice de transition de la chaîne de Markov.** Plus précisément, $\mathbf{q}(n)$ tend vers une limite $\boldsymbol{\pi}$ indépendamment de $\mathbf{q}(0)$ si et seulement la suite des puissances de la matrice de transition de la chaîne de Markov (la suite des matrices $\mathbf{P}^n$) converge vers une matrice (stochastique) $\mathbf{P}^*$ dont toutes les lignes sont égales entre elles. De plus, chaque ligne de $\mathbf{P}^*$ est égale à $\boldsymbol{\pi}$.

- $\boxed{\Longrightarrow}$ Si $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbf{q}(n) = \lim\limits_{n\to\infty} \mathbf{q}(0)\mathbf{P}^n = \boldsymbol{\pi}$ pour tout $\mathbf{q}(0)$, alors en prenant $\mathbf{q}(0) = (1, 0, ..., 0)$, on obtient

$$\lim_{n\to\infty} (1, 0, ..., 0)\mathbf{P}^n = (1, 0, ..., 0) \lim_{n\to\infty} \mathbf{P}^n = l_1^* = \boldsymbol{\pi}$$

  où l_1^* est la première ligne de P^*. De même, pour $\mathbf{q}(0) = (0, ..., 0, 1, 0, ..., 0)$, on a

$$\lim_{n\to\infty} (0, ..., 0, 1, 0, ..., 0), \mathbf{P}^n = (0, ..., 0, 1, 0, ..., 0), \lim_{n\to\infty} \mathbf{P}^n = l_i^* = \boldsymbol{\pi}$$

  On en déduit que la suite des matrices $\mathbf{P}^n$ converge vers une matrice dont toutes les lignes sont égales à $\boldsymbol{\pi}$.

- $\boxed{\Longleftarrow}$ Inversement, si $\mathbf{P}^* = \lim\limits_{n\to\infty} \mathbf{P}^n$ existe et que

$$\mathbf{P}^* = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\pi} \\ \vdots \\ \boldsymbol{\pi} \end{pmatrix}$$

  alors

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{q}(n) = \lim_{n\to\infty} \mathbf{q}(0)\mathbf{P}^n = \mathbf{q}(0) \begin{pmatrix} \boldsymbol{\pi} \\ \vdots \\ \boldsymbol{\pi} \end{pmatrix} = \boldsymbol{\pi}$$

Remarque : lorsque $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbf{q}(n)$ dépend de $\mathbf{q}(0)$, la matrice $\mathbf{P}^n$ peut converger vers une matrice dont les lignes ne sont pas identiques. Par exemple, la matrice

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ C & D \end{pmatrix}$$

converge vers

$$\mathbf{P}^{\infty}=\left(\begin{array}{cc} I & 0 \\ C^{\infty} & D^{\infty} \end{array}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\begin{array}{cc} I & 0 \\ C_n & D^n \end{array}\right)$$

avec

$$\begin{aligned} C_n &= C+DC+...+D^{n-1}=(I-D)^{-1}(I-D^n)\,C \\ D^n &= P\left(\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2^n} \end{array}\right)P^{-1} \end{aligned}$$

One en déduit

$$\mathbf{P}^{\infty}=\left(\begin{array}{cc} I & 0 \\ (I-D)^{-1}C & 0 \end{array}\right)=\left(\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{4}{9} & \frac{5}{9} & 0 & 0 \\ \frac{2}{9} & \frac{7}{9} & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Par exemple, la probabilité d'atteindre le premier état absorbant en partant du 3ème état est $\frac{4}{9}$. De plus, on a

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty}\mathbf{q}(n) &= \lim_{n\to\infty}\mathbf{q}(0)\mathbf{P}^n \\ &= \mathbf{q}(0)\mathbf{P}^{\infty} \\ &= \left(a+\frac{4}{9}c+\frac{2}{9}d, b+\frac{5}{9}c+\frac{7}{9}d\right) \end{aligned}$$

avec $\mathbf{q}(0)=(a,b,c,d)$. On voit que la limite de $\mathbf{q}(n)$ dépend des probabilités initiales $\mathbf{q}(0)$.

4 Exemple 1

On considère la matrice de transition

$$P = \begin{pmatrix} 1-a & 0 & a & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} & 0 \end{pmatrix}$$

d'une chaîne de Markov prenant ses valeurs dans l'ensemble $\{0,1,2,3\}$ avec $a \in [0,1]$.

1) **Recherche des solutions stationnaires**

On cherche les solutions de

$$\left\{ \begin{array}{c} \pi = \pi P \\ \sum_{k=0}^{3} \pi_k = 1 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{c} \pi_0 = (1-a)\pi_0 + \frac{1}{3}\pi_1 + \frac{1}{3}\pi_3 \\ \pi_1 = \frac{1}{3}\pi_2 \\ \pi_2 = a\pi_0 + \frac{2}{3}\pi_1 + \frac{2}{3}\pi_3 \\ \pi_3 = \frac{2}{3}\pi_2 \\ \sum_{k=0}^{3} \pi_k = 1 \end{array} \right.$$

Les équations 1) et 3) sont identiques d'où

$$\left\{ \begin{array}{c} \pi_1 = \frac{1}{3}\pi_2 \\ \pi_3 = \frac{2}{3}\pi_2 \\ a\pi_0 = \pi_2 - \frac{2}{3}\pi_1 - \frac{2}{3}\pi_3 = \frac{1}{3}\pi_2 \\ \sum_{k=0}^{3} \pi_k = 1 \end{array} \right.$$

On en déduit

$$\pi_2 = 3a\pi_0, \pi_1 = a\pi_0, \pi_3 = 2a\pi_0$$

La dernière relation donne alors

$$\pi_0(1 + a + 3a + 2a) = 1 \Rightarrow \pi_0\,(1 + 6a) = 1$$

Par conséquent, la seule distribution stationnaire est

$$\pi = \left(\frac{1}{1+6a}, \frac{a}{1+6a}, \frac{3a}{1+6a}, \frac{2a}{1+6a} \right)$$

On notera que $a \in [0,1]$ et donc nécessairement $a \neq -\frac{1}{6}$.

2) **Pour $a = \frac{1}{4}$, calculer n tel que $\|P^n - P^\infty\| \leq 10^{-2}$**
On applique le théorème mais comme pour $n_0 = 1$, toutes les colonnes possèdent au moins un 0, on essaie avec $n_0 = 2$. On obtient alors

$$P^2 = \begin{pmatrix} \frac{9}{16} & \frac{1}{12} & \frac{3}{16} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{4} & \frac{2}{9} & \frac{1}{12} & \frac{4}{9} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{2}{9} & \frac{1}{12} & \frac{4}{9} \end{pmatrix}$$

On voit donc que les hypothèses du théorème sont vérifiées avec

$$\begin{aligned} \delta &= \frac{1}{4} \text{ pour la colonne 1, i.e. } s = 1 \\ \delta &= \frac{1}{12} \text{ pour les colonnes 1 et 3, i.e. } s = 2 \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} \|\mathbf{P}^n - \mathbf{P}^\infty\| &\leq \left(1 - \frac{1}{4}\right)^{\frac{n}{2}-1} = \left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{n}{2}-1} \\ &\text{et} \\ \|\mathbf{P}^n - \mathbf{P}^\infty\| &\leq \left(1 - \frac{1}{6}\right)^{\frac{n}{2}-1} = \left(\frac{5}{6}\right)^{\frac{n}{2}-1} \end{aligned}$$

La première inégalité va conduire à la plus petite valeur de n définie par

$$\begin{aligned} \left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{n}{2}-1} &\leq 10^{-2} \Leftrightarrow \left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{n}{2}} \leq \frac{3}{4} 10^{-2} \\ &\Leftrightarrow \frac{n}{2} \log_{10}\left(\frac{3}{4}\right) \leq \log_{10}\left(\frac{3}{4}\right) - 2 \\ &\Leftrightarrow n \geq 2 - \frac{4}{\log_{10}\left(\frac{3}{4}\right)} \simeq 34.02 \end{aligned}$$

d'où

$$n \geq 35$$

3) **Soit $a = 0$ et $q(0) = (0, 0, 0, 1)$. Déterminer la loi du temps d'absorption T ainsi que sa moyenne $E[T]$.**

Pour $a = 0$, on a

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} & 0 \end{pmatrix}$$

et donc la chaîne possède un unique état absorbant qui est le premier état."0".
Le temps d'absorption est tel que

$$\begin{aligned}
P[T=n] &= P[x_n = 0, x_{n-1} \neq 0] \\
&= P[x_n = 0, x_{n-1} = 1] + P[x_n = 0, x_{n-1} = 2] + P[x_n = 0, x_{n-1} = 3] \\
&= P[|x_n = 0\ x_{n-1} = 1] \, P[x_{n-1} = 1] + P[|x_n = 0\ x_{n-1} = 2] \, P[x_{n-1} = 2] \\
&\quad + P[|x_n = 0\ x_{n-1} = 3] \, P[x_{n-1} = 3] \\
&= \frac{1}{3} P[x_{n-1} = 1] + 0 \times P[x_{n-1} = 2] + \frac{1}{3} P[x_{n-1} = 3] \\
&= \frac{1}{3} P[x_{n-1} = 1] + \frac{1}{3} P[x_{n-1} = 3]
\end{aligned}$$

On voit donc qu'il faut calculer les probabilités d'occupation des états contenues dans $q(n-1)$. Il est classique de décomposer la matrice P sous la forme d'une matrice par blocs telle que

$$P = \begin{pmatrix} I & 0 \\ C & D \end{pmatrix}$$

avec ici

$$I = (1), C = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ 0 \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 \end{pmatrix}$$

Des calculs élémentaires permettent d'obtenir par récurrence

$$P^n = \begin{pmatrix} I & 0 \\ (I + D + \ldots + D^{n-1}) \, C & D^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ (I - D^n)(I - D)^{-1} \, C & D^n \end{pmatrix}$$

Calcul de D^n

Les valeurs propres de D sont les solutions de

$$\begin{aligned}
|D - \lambda I| &= 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} -\lambda & \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & -\lambda & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{2}{3} & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \\
&\Leftrightarrow -\lambda \left(\lambda^2 - \frac{4}{9} \right) - \frac{1}{3} \left(-\frac{2}{3} \lambda \right) = 0 \\
&\Leftrightarrow \lambda \left(-\lambda^2 + \frac{6}{9} \right) = 0 \\
&\Leftrightarrow -\lambda \left(\lambda - \frac{\sqrt{6}}{3} \right) \left(\lambda + \frac{\sqrt{6}}{3} \right) = 0
\end{aligned}$$

On en déduit

$$D^n = P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right)^n & 0 \\ 0 & 0 & \left(-\frac{\sqrt{6}}{3}\right)^n \end{pmatrix} P^{-1} = M\left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right)^n + N\left(-\frac{\sqrt{6}}{3}\right)^n$$

Mais $q(0) = (0,0,0,1)$ donc

$$\begin{aligned} q(n-1) &= q(0)P^{n-1} \\ &= (0,0,0,1)\begin{pmatrix} I & 0 \\ \left(I - D^{n-1}\right)(I-D)^{-1}C & D^{n-1} \end{pmatrix} \\ &= \left(P\left[x_{n-1}=0\right], P\left[x_{n-1}=1\right], P\left[x_{n-1}=2\right], P\left[x_{n-1}=3\right]\right) \end{aligned}$$

Les deux probabilités recherchées $P\left[x_{n-1}=1\right]$ et $P\left[x_{n-1}=3\right]$ sont donc sur la dernière ligne de D^{n-1}. Ces probabilités sont donc de la forme

$$\begin{aligned} P\left[x_{n-1}=1\right] &= a_1\left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right)^{n-1} + b_1\left(-\frac{\sqrt{6}}{3}\right)^{n-1} \\ P\left[x_{n-1}=3\right] &= a_3\left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right)^{n-1} + b_3\left(-\frac{\sqrt{6}}{3}\right)^{n-1} \end{aligned}$$

En remplaçant dans $P[T=n]$, on obtient

$$\begin{aligned} P[T=n] &= \frac{1}{3}P\left[x_{n-1}=1\right] + \frac{1}{3}P\left[x_{n-1}=3\right] \\ &= A\left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right)^{n-1} + B\left(-\frac{\sqrt{6}}{3}\right)^{n-1} \end{aligned}$$

Pour déterminer$A$ et B, il suffit de déterminer des cas particuliers associés à certaines valeurs de n, par exemple $P[T=1]$ et $P[T=2]$. On a alors

$$\begin{aligned} P[T=1] &= A+B \\ P[T=2] &= A\left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right) - B\left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right) \end{aligned}$$

Mais $P[T=1] = P\left[x_1 = 0\right]$ est le premier élément de

$$\begin{aligned} q(1) &= q(0)P \\ &= (0,0,0,1)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} & 0 \end{pmatrix} \\ &= \left(\frac{1}{3}, 0, \frac{2}{3}, 0\right) \end{aligned}$$

d'où

$$A+B=\frac{1}{3}$$

De la même façon

$$\begin{aligned}
q(2) &= q(1)P \\
&= \left(\frac{1}{3},0,\frac{2}{3},0\right)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} & 0 \end{pmatrix} \\
&= \left(\frac{1}{3},\frac{2}{9},0,\frac{4}{9}\right)
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
P\left[T=2\right] &= P\left[x_2=0,x_1=1\right]+P\left[x_2=0,x_1=2\right]+P\left[x_2=0,x_1=3\right] \\
&= P\left[x_2=0\left|x_1=1\right.\right]P\left[x_1=1\right]+P\left[x_2=0\left|x_1=2\right.\right]P\left[x_1=2\right] \\
&\quad +P\left[x_2=0\left|x_1=3\right.\right]P\left[x_1=3\right] \\
&= \frac{1}{3}\times 0+0\times\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\times 0=0
\end{aligned}$$

On a donc

$$A=B$$

d'où

$$A=B=\frac{1}{6}$$

c'est-à-dire

$$P\left[T=n\right]=\frac{1}{6}\left[\left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right)^{n-1}+\left(-\frac{\sqrt{6}}{3}\right)^{n-1}\right]$$

ce qui peut s'écrire

$$\left\{\begin{array}{c} P\left[T=2k\right]=0 \\ P\left[T=2k+1\right]=\frac{1}{3}\left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right)^{2k} \end{array}\right.$$

pour $k\in\mathbb{N}$. La moyenne de T est alors

$$E\left[T\right]=\frac{1}{3}\sum_{k=0}^{\infty}(2k+1)\left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right)^{2k}$$

En utilisant

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^{2k+1} = \frac{x}{1-x^2} \Longrightarrow \sum_{k=0}^{\infty} (2k+1)\, x^{2k} = \frac{1+x^2}{\left(1-x^2\right)^2}$$

il vient

$$E\left[T\right] = 5$$

5 Exemple 2

Cet exemple est issu du partiel du 2 septembre 2005 dans lequel on considérait une chaîne de Markov prenant les valeurs $-1, 0$ et 1 avec la matrice de transition

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

1) *Déterminer* A^∞

Les distributions stationnaires de la matrice A vérifient

$$\begin{cases} \pi = \pi A \\ \pi_{-1} + \pi_0 + \pi_1 = 1 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \pi_{-1} = \frac{1}{3}\pi_0 + \frac{1}{2}\pi_1 \\ \pi_0 = \frac{1}{2}\pi_{-1} + \frac{1}{3}\pi_0 + \frac{1}{2}\pi \\ \pi_1 = \frac{1}{2}\pi_{-1} + \frac{1}{3}\pi_0 \\ \pi_{-1} + \pi_0 + \pi_1 = 1 \end{cases}$$

Ce système se résoud de manière élémentaire et conduit à

$$\pi_{-1} = \pi_1 = \frac{2}{7} \text{ et } \pi_0 = \frac{3}{7}$$

En regardant la deuxième colonne de la matrice A, on voit qu'on peut appliquer le théorème de cours. En conséquence

$$A^\infty = \begin{pmatrix} \pi \\ \pi \\ \pi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{7} & \frac{3}{7} & \frac{2}{7} \\ \frac{2}{7} & \frac{3}{7} & \frac{2}{7} \\ \frac{2}{7} & \frac{3}{7} & \frac{2}{7} \end{pmatrix}$$

2) *On suppose que la chaîne de Markov est stationnaire. En déduire* $P[x_n = -1], P[x_n = 0]$ *et* $P[x_n = 1]$*. Calculer ensuite* $E[x_n], E[x_n^2]$ *et* $E[x_n x_{n+1}]$*.*

Puisque la chaîne de Markov est stationnaire, on a atteint l'état stationnaire π, d'où

$$P[x_n = -1] = \frac{2}{7}, P[x_n = 0] = \frac{3}{7} \text{ et } P[x_n = 1] = \frac{2}{7}$$

On a donc

$$\begin{aligned} E[x_n] &= (-1) \times \frac{2}{7} + 0 \times \frac{3}{7} + 1 \times \frac{2}{7} = 0 \\ E[x_n^2] &= (-1)^2 \times \frac{2}{7} + 0^2 \times \frac{3}{7} + 1^2 \times \frac{2}{7} = \frac{4}{7} \end{aligned}$$

De plus

$$\begin{aligned}
E[x_n x_{n+1}] &= 1 \times P[x_n x_{n+1} = 1] + 0 \times P[x_n x_{n+1} = 0] \\
&\quad + (-1) \times P[x_n x_{n+1} = -1] \\
&= P[x_n x_{n+1} = 1] - P[x_n x_{n+1} = -1] \\
&= A_{11} P[x_n = 1] + A_{-1-1} P[x_n = -1] \\
&\quad - A_{-11} P[x_n = -1] - A_{1-1} P[x_n = 1] \\
&= A_{-11} P[x_n = -1] + A_{1-1} P[x_n = 1] \;\; (A_{-1-1} = A_{11} = 0) \\
&= -\frac{1}{2} \times \frac{2}{7} - \frac{1}{2} \times \frac{2}{7} \\
&= -\frac{2}{7}
\end{aligned}$$

3) *En utilisant l'existence de A^∞, en déduire*

$$\lim_{n \to \infty} E[x_m x_{n+m}]$$

On a

$$\begin{aligned}
E[x_m x_{n+m}] &= P[x_m x_{n+m} = 1] - P[x_m x_{n+m} = -1] \\
&= A_{11}^{(n)} P[x_m = 1] + A_{-1-1}^{(n)} P[x_m = -1] \\
&\quad - A_{-11}^{(n)} P[x_m = -1] - A_{1-1}^{(n)} P[x_m = 1] \\
&= \frac{2}{7} A_{11}^{(n)} + \frac{2}{7} A_{-1-1}^{(n)} - \frac{2}{7} A_{-11}^{(n)} - \frac{2}{7} A_{1-1}^{(n)}
\end{aligned}$$

où $A^{(n)} = A^n$ est la matrice contenant les matrice de transition entre x_m et x_{n+m}. Si l'existence de A^∞ est assurée, on a

$$\lim_{n \to \infty} A^{(n)} = A^\infty = \begin{pmatrix} \frac{2}{7} & \frac{3}{7} & \frac{2}{7} \\ \frac{2}{7} & \frac{3}{7} & \frac{2}{7} \\ \frac{2}{7} & \frac{3}{7} & \frac{2}{7} \end{pmatrix}$$

d'où

$$\begin{aligned}
\lim_{n \to \infty} E[x_m x_{n+m}] &= \lim_{n \to \infty} \frac{2}{7} \left[A_{11}^{(n)} + A_{-1-1}^{(n)} + A_{-11}^{(n)} + A_{1-1}^{(n)} \right] \\
&= \frac{2}{7} \left[\frac{2}{7} + \frac{2}{7} - \frac{2}{7} - \frac{2}{7} \right] = 0.
\end{aligned}$$

6 Exemple 3

On considère une chaîne de Markov stationnaire $\mathbf{Y} = \{Y_n, n \in \mathbb{Z}\}$ à 2 états a et b avec $ab < 0$ et la matrice de transition

$$Q = \begin{pmatrix} \alpha & 1-\alpha \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

(avec par exemple $\alpha = P[Y_n = a | Y_{n-1} = a]$).

1) *Calculer les probabilités d'occupation des états*

La matrice Q vérifie les hypothèses du théorème du cours, donc

$$\lim_{n\to\infty} q(n) = \pi \text{ avec } \pi Q = \pi$$

c'est-à-dire

$$\left\{ \begin{array}{c} \pi = \pi Q \\ \pi_a + \pi_b = 1 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{c} \pi_a = \alpha \pi_a + \frac{1}{2}\pi_b \\ \pi_b = (1-\alpha)\pi_a + \frac{1}{2}\pi_b \\ \pi_a + \pi_b = 1 \end{array} \right.$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{c} \pi_a (1-\alpha) = \frac{1}{2}\pi_b \\ \pi_a + \pi_b = 1 \end{array} \right.$$

- Si $\alpha \neq 1$, on a

$$\pi_a = \frac{1}{3-2\alpha} \text{ et } \pi_b = \frac{2(1-\alpha)}{3-2\alpha}$$

- Si $\alpha = 1$, on a

$$\pi_a = 1 \text{ et } \pi_b = 0$$

2) *Déterminer $a(\alpha)$ et $b(\alpha)$ de façon à avoir $E[Y_n] = 0$ et $Var[Y_n] = 1$.*

Puisqu'on est dans le régime stationnaire

$$\begin{aligned} P[Y_n = a] &= \pi_a = \frac{1}{3-2\alpha} \\ P[Y_n = b] &= \pi_b = \frac{2(1-\alpha)}{3-2\alpha} \end{aligned}$$

donc

$$E[Y_n] = \frac{1}{3-2\alpha}a + \frac{2(1-\alpha)}{3-2\alpha}b = 0$$

et

$$\operatorname{var}[Y_n] = E\left[Y_n^2\right] = \frac{1}{3-2\alpha}a^2 + \frac{2(1-\alpha)}{3-2\alpha}b^2 = 1$$

La résolution de ce système de deux équations à deux inconnues donne

$$\left\{\begin{array}{c} a=\sqrt{2\left(1-\alpha\right)} \\ b=\frac{-1}{\sqrt{2(1-\alpha)}} \end{array}\right. \quad \text{ou} \quad \left\{\begin{array}{c} a=-\sqrt{2\left(1-\alpha\right)} \\ b=\frac{1}{\sqrt{2(1-\alpha)}} \end{array}\right.$$

Par exemple, pour $\alpha=\frac{1}{4}$, on obtient

$$\left\{\begin{array}{c} a=\frac{\sqrt{6}}{2} \\ b=-\frac{\sqrt{6}}{3} \end{array}\right. \quad \text{ou} \quad \left\{\begin{array}{c} a=-\frac{\sqrt{6}}{2} \\ b=\frac{\sqrt{6}}{3} \end{array}\right.$$

3) *Pour* $\alpha=\frac{1}{4}$ *et sous les conditions déterminées dans la question prévédente*

- 3.1) *Déterminer la densité spectrale de puissance de* Y_n

  Pour $\alpha=\frac{1}{4}$, la matrice de transition est

  $$Q=\left(\begin{array}{cc} \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right)$$

  et ses valeurs propres vérifient

  $$\begin{aligned} \det\left(Q-\lambda I\right) &= 0 \Longleftrightarrow \left|\begin{array}{cc} \frac{1}{4}-\lambda & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}-\lambda \end{array}\right|=0 \\ &\Longleftrightarrow \lambda^2-\frac{3}{4}\lambda-\frac{1}{4}=0 \end{aligned}$$

  On sait que $\lambda=1$ est valeur propre de Q donc on peut factoriser $\lambda-1$ dans $\det\left(Q-\lambda I\right)$ d'où

  $$\det\left(Q-\lambda I\right)=0=\left(\lambda-1\right)\left(\lambda+\frac{1}{4}\right)=0$$

  D'après le cours, la fonction d'autocorrélation de Y s'écrit

  $$r_Y(k)=E\left[Y_nY_{n+k}\right]=C_1+C_2\left(-\frac{1}{4}\right)^{|k|}$$

  et donc il suffit de déterminer les constantes C_1 et C_2. Pour ce, on calcule des valeurs particulières de r, par exemple associées à $k=0$ et $k=1$. Pour $k=0$

  $$\begin{aligned} r_Y(0) &= E\left[Y_n^2\right]=a^2P\left[Y_n=a\right]+b^2P\left[Y_n=b\right] \\ &= a^2\pi_a+b^2\pi_b \end{aligned}$$

Pour $\alpha = \frac{1}{4}$, on a $a^2 = \frac{3}{2}, b^2 = \frac{2}{3}$ et $ab = -1$. De plus,

$$\begin{aligned} \pi_a &= \frac{1}{3-2\alpha} = \frac{2}{5} \\ \pi_b &= \frac{2(1-\alpha)}{3-2\alpha} = \frac{3}{5} \end{aligned}$$

$$r(0) = \frac{3}{2} \times \frac{2}{5} + \frac{2}{3} \times \frac{3}{5} = 1$$

d'où

$$C_1 + C_2 = 1$$

De même pour $k = 1$

$$\begin{aligned} r_Y(1) &= E[Y_n Y_{n+1}] \\ &= a^2 P[Y_n = a, Y_{n+1} = a] + b^2 P[Y_n = b, Y_{n+1} = b] \\ &\quad + ab \{P[Y_n = a, Y_{n+1} = b] + P[Y_n = b, Y_{n+1} = a]\} \\ &= a^2 P[Y_{n+1} = a | Y_n = a] P[Y_n = a] + b^2 P[Y_{n+1} = b | Y_n = b] P[Y_n = b] \\ &\quad + ab \{P[Y_{n+1} = a | Y_n = b] P[Y_n = b] + P[Y_{n+1} = b | Y_n = a] P[Y_n = a]\} \\ &= \frac{3}{2} \times \frac{1}{4} \times \frac{2}{5} + \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} \times \frac{3}{5} - \left\{\frac{1}{2} \times \frac{3}{5} + \frac{3}{4} \times \frac{2}{5}\right\} \\ &= -\frac{1}{4} \end{aligned}$$

d'où le système

$$\left\{ \begin{array}{c} C_1 + C_2 = 1 \\ C_1 + C_2\left(-\frac{1}{4}\right) = -\frac{1}{4} \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} C_1 = 0 \\ C_2 = 1 \end{array} \right.$$

Finalement, la fonction d'autocorrélation de Y_n est

$$r_Y(k) = E[Y_n Y_{n+k}] = \left(-\frac{1}{4}\right)^{|k|}$$

Remarque intéressante : on peut voir directement que $C_1 = 0$ car$E[Y_n] = 0$ implique

$$\lim_{k \to \infty} r_Y(k) = 0 = C_1.$$

La densité spectrale de puissance de Y_n s'écrit alors

$$\begin{aligned}
s_Y(f) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} r_Y(k) e^{-j2\pi kf} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{4}\right)^k e^{-j2\pi kf} + \sum_{k=-\infty}^{-1} \left(-\frac{1}{4}\right)^{-k} e^{-j2\pi kf} \\
&= \frac{1}{1+\frac{1}{4}e^{-j2\pi f}} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{4}\right)^k e^{j2\pi kf} \\
&= \frac{1}{1+\frac{1}{4}e^{-j2\pi f}} - 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{4}e^{j2\pi f}}
\end{aligned}$$

c'est–à-dire

$$\begin{aligned}
s_Y(f) &= -1 + \frac{2+\frac{1}{2}\cos(2\pi f)}{\frac{17}{16}+\frac{1}{2}\cos(2\pi f)} \\
&= \frac{\frac{15}{16}}{\frac{17}{16}+\frac{1}{2}\cos(2\pi f)}
\end{aligned}$$

- 3.2) *Déterminer la densité spectrale de puissance de la suite stationnaire* **U** *telle que*

$$U_n - 4U_{n-1} + 4U_{n-2} = Y_n - 2Y_{n-1}$$

La suite **U** est obtenue par filtrage linéaire de la suite **Y** avec un filtre de transmittance

$$H(z) = \frac{1-2z^{-1}}{1-4z^{-1}+4z^{-2}} = \frac{z(z-2)}{z^2-4z+4} = \frac{z}{z-2}$$

En utilisant la relation de Wiener-Lee, on obtient

$$\begin{aligned}
s_U(f) &= s_Y(f) \left| \frac{e^{j2\pi f}}{e^{j2\pi f}-2} \right|^2 \\
&= s_Y(f) \frac{1}{5-4\cos(2\pi f)}
\end{aligned}$$

- 3.3) *Déterminer l'équation d'une suite ARMA vérifiée par* **U**

Tout d'abord, il est important de mentionner que

$$U_n - 4U_{n-1} + 4U_{n-2} = Y_n - 2Y_{n-1}$$

n'est pas l'équation d'une suite ARMA car la suite **Y** n'est pas un bruit blanc. Mais d'après ce qui précède, on sait que la densité spectrale de puissance de **Y** s'écrit

$$\begin{aligned} s_Y(f) &= \frac{\frac{15}{16}}{\frac{17}{16} + \frac{1}{2}\cos(2\pi f)} \\ &= \frac{\frac{15}{16}}{\left|1 + \frac{1}{4}e^{-j2\pi f}\right|^2} \end{aligned}$$

On voit donc que Y_n est la sortie d'un filtre linéaire d'entrée le bruit blanc $e(n)$ de variance $E\left[e^2(n)\right] = \frac{15}{16}$ et de transmittance

$$\begin{aligned} T(z) &= \frac{1}{1 + \frac{1}{4}z^{-1}} \\ &= \frac{1}{\frac{1}{4} + z^{-1}} \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} U(z) &= H(z)T(z)E(z) \\ &= \frac{1}{1 - 2z^{-1}} \frac{1}{\frac{1}{4} + z^{-1}} E(z) \end{aligned}$$

On a alors

$$\left(1 + \frac{1}{2}z^{-1} - 2z^{-2}\right) U(z) = E(z)$$

soit

$$u(n) + \frac{1}{2}u(n-1) - 2u(n-2) = e(n)$$

7 Exemple 4

On considère une chaîne de Markov stationnaire $\mathbf{X} = \{X_n, n \in \mathbb{Z}\}$ à 4 états $\{1, 2, 3, 4\}$ de matrice de transition

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 1-a & 0 & a & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

avec $0 \leq a < 1$.

1) *Déterminer les probabilités asymptotiques des états et* $E[X_\infty]$, $\mathrm{Var}[X_\infty]$.

On résoud le système

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\pi} &= \boldsymbol{\pi}\mathbf{Q} \\ \sum_{k=1}^{4} \pi_k &= 1 \end{aligned}$$

et on obtient pour $a \neq -\frac{1}{4}$

$$\boldsymbol{\pi} = (\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4) = \left(\frac{1}{1+4a}, \frac{a}{1+4a}, \frac{2a}{1+4a}, \frac{a}{1+4a}\right)$$

Pour $a = -\frac{1}{4}$, pas de solution stationnaire. Des calculs élémentaires permettent d'obtenir

$$\mathbf{Q}^2 = \begin{pmatrix} (1-a)^2 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2}(1-a) & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2}(1-a) & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

En observant la première colonne de $\mathbf{Q}^2$ et en appliquant le théorème du cours, on en déduit que la loi stationnaire $\boldsymbol{\pi}$ déterminée ci-dessus est aussi la loi limite. On a alors

$$\begin{aligned}
E\left[X_\infty\right] &= \frac{1}{1+4a}+\frac{2a}{1+4a}+\frac{6a}{1+4a}+\frac{4a}{1+4a} \\
&= \frac{12a+1}{4a+1} \\
E\left[X_\infty^2\right] &= \frac{1}{1+4a}+\frac{4a}{1+4a}+\frac{18a}{1+4a}+\frac{16a}{1+4a} \\
&= \frac{39a+1}{4a+1} \\
\operatorname{Var}\left[X_\infty\right] &= E\left[X_\infty^2\right]-E\left[X_\infty\right]^2 \\
&= \frac{39a+1}{4a+1}-\left(\frac{12a+1}{4a+1}\right)^2 \\
&= \frac{a(12a+19)}{(4a+1)^2}
\end{aligned}$$

2) Soit $a=0$ et $\mathbf{q}(0)=(0,0,0,1)$. *Déterminer la loi du temps d'absorption* T *puis* $E\left[T\right]$ *et* $\operatorname{Var}[T]$

La matrice $\mathbf{Q}$ s'écrit

$$\mathbf{Q}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{pmatrix}$$

et on montre que la matrice $\mathbf{D}$ admet trois valeurs propres $\lambda=0, \lambda=\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\lambda=-\frac{\sqrt{2}}{2}$. De plus, on a (voir exemple 1)

$$\begin{aligned}
P\left[T=n\right] &= P\left[X_n=1, X_{n-1}\neq 1\right] \\
&= \frac{1}{2}P\left[X_{n-1}=2\right]+\frac{1}{2}P\left[X_{n-1}=4\right]
\end{aligned}$$

Les deux probabilités recherchées sont des éléments du vecteur

$$\mathbf{q}(n-1)=\mathbf{q}(0)\mathbf{D}^{n-1}$$

Mais

$$\mathbf{D}=\mathbf{P}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}\mathbf{P}^{-1}$$

d'où

$$\mathbf{D}^{n-1}=\mathbf{P}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n-1} \end{pmatrix}\mathbf{P}^{-1}$$

Donc

$$\begin{aligned}
P\left[X_{n-1}=2\right] &= C_{21}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n-1}+C_{22}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n-1} \\
P\left[X_{n-1}=4\right] &= C_{41}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n-1}+C_{42}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n-1}
\end{aligned}$$

et finalement

$$P\left[T=n\right]=A\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n-1}+B\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n-1}$$

Les constantes A et B sé déterminent en considérant des cas particuliers pour $P\left[T=n\right]$.

- Pour $n=1$

$$P\left[T=1\right]=P\left[X_1=1\right]=\frac{1}{2}\Longrightarrow A+B=\frac{1}{2}$$

Pour $n=2$

$$\begin{aligned}
P\left[T=2\right] &= P\left[X_2=1,X_1=2\right]+P\left[X_2=1,X_1=3\right]+P\left[X_2=1,X_1=4\right] \\
&= 0\Longrightarrow A=B
\end{aligned}$$

On en déduit

$$P\left[T=n\right]=\frac{1}{4}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n-1}+\frac{1}{4}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n-1}$$

ou pour tout $k\in\mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
P\left[T=2k\right] &= 0 \\
P\left[T=2k+1\right] &= \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{2k}
\end{aligned}$$

$E\left[T\right]$ et $\mathrm{Var}[T]$ s'en déduisent facilement (voir exemple 1).

8 Bibliographie

- Alan Ruegg, Processus Stochastiques, Presses Polytechniques et Universitaires Romandes, Méthodes mathématiques pour l'ingénieur, 1993.
- Athanasios Papoulis and S. Unnikrishna Pillai, Probability, Random Variable and Stochastic Processes, McGraw Hill Higher Education, 4th edition, 2002.
- Bruno Baynat, Théorie des files d'attente. Des Chaînes de Markov aux réseaux à forme produit, Hermes Sciences Publications, 1970.
- Bernard Lacaze, Processus aléatoires pour communications numériques, Hermes Sciences Publications, 2000.

Chapitre 2

Suites Stationnaires

1 Stationnarité

1.1 Définition

Une suite de variables aléatoires $x_n, n \in \mathbb{Z}$ est stationnaire si elle vérifie les conditions suivantes

$$\begin{aligned} E\left[x_n\right] &= m \\ E\left[x_n x_{n-m}^*\right] &= r_x\left(m\right) \triangleq r(m) \end{aligned}$$

La suite $\{r(m), m \in \mathbb{Z}\}$ est appelée fonction d'autocorrélation de la suite $\{x_n, n \in \mathbb{Z}\}$.

1.2 Exemples

- Bruit blanc
- Echantillonnage périodique d'un processus aléatoire stationnaire à temps continu

1.3 Propriétés de r_x

La fonction d'autocorrélation d'une suite stationnaire possède des propriétés analogues à la fonction d'autocorrélation d'un processus aléatoire à temps continu stationnaire. En particulier

- symétrie hermitienne (parité pour une suite réelle)

$$r^*(-m) = r(m)$$

- Valeur à l'origine
$$|r(m)| \leq r(0)$$
- suite des $r(m)$ définie non négative
$$\sum_{j,k=1}^{n} a_j a_k^* r(j-k) \geq 0, \qquad \forall n, a_j, a_k$$

1.4 Densité spectrale de puissance (théorème d'Herglotz)

Théorème d'Herglotz : une fonction à valeurs complexes $r(m)$ définie sur les entiers (i.e. $m \in \mathbb{Z}$) est définie non négative si et seulement si elle s'écrit

$$r(m) = \int_{-1/2}^{1/2} e^{2i\pi m f} dS(f)$$

où $S(.)$ est une fonction continue à droite, non décroissante, bornée sur $[-1/2, 1/2]$ et telle que $S(-1/2) = 0$. La fonction S est appelée spectre de r et si elle peut s'écrire

$$S(f) = \int_{-1/2}^{f} s(u)du$$

la fonction $s(f)$ s'appelle densité spectrale de puissance de r. On a alors

$$r(m) = \int_{-1/2}^{1/2} e^{2i\pi m f} s(f) df \tag{2.1}$$

$$s(f) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} r(m) e^{-2i\pi m f} \tag{2.2}$$

Preuve : Une preuve rigoureuse de ce théorème est donnée dans [1, p. 118]. Ici, on montre simplement que si $s(f)$ s'écrit comme dans (2.2), alors $r(m)$ vérifie (2.1). En effet

$$\begin{aligned}
\sum_{n\in\mathbb{Z}} r(n) e^{-j2\pi n f} &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \left(\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} e^{j2\pi n u} s(u) du \right) e^{-j2\pi n f} \\
&= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} s(u) \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{j2\pi n(u-f)} \right) du
\end{aligned}$$

On utilise alors la formule sommatoire de Poisson

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{j2\pi nx} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \delta(x-n)$$

pour obtenir :

$$\begin{aligned}\sum_{n\in\mathbb{Z}} r(n)\, e^{-j2\pi nf} &= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} s(u) \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} \delta(u-f-n) \right) du \\ &= s(f)\end{aligned}$$

Remarquons que la dernière égalité est obtenue car la seule valeur de $f+n$ appartenant à l'intervalle $\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$ est celle associée à $n=0$ puisque $f \in \left]-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right[$.

Exemple : $r(n) = \lambda^{|n|}$ avec $|\lambda| < 1$.

2 Filtrage Linéaire Invariant dans le Temps

2.1 Définitions

On dit que $\{x_n, n \in \mathbb{Z}\}$ est obtenue par filtrage linéaire (invariant dans le temps) de la suite $\{e_n, n \in \mathbb{Z}\}$, s'il existe une suite de nombres réels $\{h_k, k \in \mathbb{Z}\}$ (appelée **réponse impulsionnelle du filtre**) telle que

$$x_n = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_k e_{n-k}$$

On désire généralement avoir une opération de filtrage stable, qui engendre une sortie bornée dès que l'entrée est bornée (Stabilité BIBO, pour Bounded Input Bounded Output). Une condition nécessaire et suffisante de stabilité est

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |h_k| < \infty$$

La condition est suffisante car

$$\sup x_n \leq \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} |h_k| \right) \sup e_n$$

On peut montrer que la condition est nécessaire car si $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |h_k| = \infty$, on peut trouver des entrées bornées telles que la sortie ne l'est pas. La fonction de transfert d'un filtre (ou transmittance) est définie par

$$H(f) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_k e^{-j2\pi kf} = \mathrm{TFD}\left[h_k\right], \qquad -\frac{1}{2} \leq f \leq \frac{1}{2}$$

Notons que l'existence de $H(f)$ est assurée car

$$|H(f)| \leq \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h_k| < \infty$$

2.2 Relations de Wiener Lee

La première relation de Wiener-Lee permet d'obtenir **la densité spectrale de puissance de la sortie d'un filtre notée** $x(t)$ en fonction de celle de l'entrée de ce filtre notée $e(t)$

$$s_x(f) = s_e(f) \left|H(f)\right|^2 \text{ avec } H(f) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_k e^{-j2\pi kf} \tag{2.3}$$

La deuxième relation de Wiener-Lee exprime l'**intercorrélation entre l'entrée et la sortie du filtre** en fonction de l'autocorrélation et la densité spectrale de l'entrée de ce filtre

$$r_{xe}(k) = E\left[x_n e_{n-k}^*\right] = h(k) * r_e(k)$$

c'est-à-dire

$$r_{xe}(k) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} H(f)\, e^{j2\pi kf} s_e(f)\, df \tag{2.4}$$

Preuve de (2.3) :

$$\begin{aligned} r_x(k) &= E\left[\sum_{i\in\mathbb{Z}} h_i e_{n-i} \sum_{j\in\mathbb{Z}} h_j^* e_{n-k-j}^*\right] \\ &= \sum_{i\in\mathbb{Z}} \sum_{j\in\mathbb{Z}} h_i h_j^* E\left[e_{n-i} e_{n-k-j}^*\right] \\ &= \sum_{i\in\mathbb{Z}} \sum_{j\in\mathbb{Z}} h_i h_j^* r_e(k+j-i) \end{aligned}$$

On en déduit

$$\begin{aligned}
s_x(f) &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} r_x(k)\, e^{-j2\pi kf} \\
&= \sum_{i\in\mathbb{Z}}\sum_{k\in\mathbb{Z}} h_i h_k^* \left\{\sum_{l\in\mathbb{Z}} r_e(l+k-i)\, e^{-j2\pi lf}\right\} \\
&= \sum_{i\in\mathbb{Z}}\sum_{k\in\mathbb{Z}} h_i h_k^* \left\{\sum_{m\in\mathbb{Z}} r_e(m)\, e^{-j2\pi(m+i-k)f}\right\} \\
&= \sum_{i\in\mathbb{Z}}\sum_{k\in\mathbb{Z}} h_i h_k^* s_e(f)\, e^{-j2\pi(i-k)f} \\
&= s_e(f)\left(\sum_{i\in\mathbb{Z}} h_i e^{-j2\pi if}\right)\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} h_k^* e^{-j2\pi kf}\right) \\
&= s_e(f)\, H(f)\, H^*(f) \\
&= s_e(f)\, |H(f)|^2
\end{aligned}$$

Preuve de (2.4) :

$$\begin{aligned}
r_{xe}(k) &= E\left[\left(\sum_{l=-\infty}^{\infty} h_l e_{n-l}\right) e_{n-k}^*\right] \\
&= \sum_{l=-\infty}^{\infty} h_l E\left[e_{n-l} e_{n-k}^*\right] \\
&= \sum_{l=-\infty}^{\infty} h_l r_e(k-l) \\
&= h(k) * r_e(k) \\
&= \int_{-1/2}^{1/2} e^{2i\pi kf} A(f) df
\end{aligned}$$

où $A(f)$ est la TFD de $h(k) * r_e(k)$, c'est-à-dire

$$A(f) = H(f)\, s_e(f)$$

2.3 Formule des interfèrences

$$\begin{aligned}
r_{yz}(k) &= E\left[y_n z_{n-k}^*\right] \\
&= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} H(f)\, G^*(f)\, e^{j2\pi kf} s_e(f)\, df
\end{aligned}$$

Preuve :

$$TF\left[r_{yz}(k)\right] = \sum_{k\in\mathbb{Z}} r_{yz}(k)\, e^{j2\pi kf}$$

Mais

$$\begin{aligned} r_{yz}(k) &= E\left[y_n z^*_{n-k}\right] \\ &= E\left[\sum_{l=-\infty}^{\infty} h_l e_{n-l} \sum_{i=-\infty}^{\infty} g^*_i e^*_{n-k-i}\right] \\ &= \sum_{l=-\infty}^{\infty}\sum_{i=-\infty}^{\infty} h_l g^*_i r_e(k+i-l) \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} \mathrm{TFD}\left[r_{yz}(k)\right] &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} r_{yz}(k)\, e^{-j2\pi kf} \\ &= \sum_{k\in\mathbb{Z}}\sum_{l=-\infty}^{\infty}\sum_{i=-\infty}^{\infty} h_l g^*_i r_e(k+i-l)\, e^{-j2\pi kf} \end{aligned}$$

On pose $k' = k+i-l$ et on obtient

$$\begin{aligned} \mathrm{TFD}\left[r_{yz}(k)\right] &= \sum_{l=-\infty}^{\infty}\sum_{i=-\infty}^{\infty} h_l g^*_i \left[\sum_{k'\in\mathbb{Z}} r_e(k')\, e^{-j2\pi(k'+l-i)f}\right] \\ &= \sum_{l=-\infty}^{\infty}\sum_{i=-\infty}^{\infty} h_l g^*_i e^{j2\pi(-l+i)f} s_e(f) \\ &= H(f)G^*(f)s_e(f) \end{aligned}$$

d'où

$$r_{yz}(k) = \mathrm{TFD}^{-1}\left[H(f)G^*(f)s_e(f)\right]$$

2.4 Transformée en Z

On trouve dans la littérature des formules de Wiener Lee exprimées à l'aide de la transformée en Z (TZ). La TZ de la suite x_n est définie par :

$$X(z) = TZ\left[x_n\right] = \sum_{k\in\mathbb{Z}} x_k z^{-k}$$

La TZ de cette suite coincide donc avec sa TFD lorsque $z = e^{j2\pi f}$, c'est-à-dire lorsqu'on se place sur le cercle unité. Lorsque $x_n = h_n * e_n$, on a classiquement

$X(z) = H(z)E(z)$. Par ailleurs, la TZ de la fonction d'autocorrélation de la suite x_n (appelée densité spectrale de puissance) vérifie :

$$s_x(z) = TZ\left[r_x(k)\right] = s_e(z)H(z)H^*\left(\tfrac{1}{z^*}\right)$$

Preuve

$$\begin{aligned}
r_x(k) &= E\left[x_n x_{n-k}^*\right] \\
&= E\left[\sum_{i\in\mathbb{Z}} h_i e_{n-i} \sum_{j\in\mathbb{Z}} h_j^* e_{n-k-j}^*\right] \\
&= \sum_{i\in\mathbb{Z}} \sum_{j\in\mathbb{Z}} h_i h_j^* r_e\left(k+j-i\right)
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
s_x(z) &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \left\{\sum_{i\in\mathbb{Z}} \sum_{j\in\mathbb{Z}} h_i h_j^* r_e\left(k+j-i\right)\right\} z^{-k} \\
&= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \left\{\sum_{i\in\mathbb{Z}} \sum_{j\in\mathbb{Z}} h_i h_j^* r_e\left(l\right)\right\} z^{-l+j-i} \\
&= s_e(z) \sum_{i\in\mathbb{Z}} \sum_{j\in\mathbb{Z}} h_i h_j^* z^{j-i} \\
&= s_e(z)H(z)H^*\left(\frac{1}{z^*}\right)
\end{aligned}$$

3 Retour sur les chaînes de Markov

Le spectre d'une chaîne de Markov est une fraction rationnelle en $e^{-2i\pi f}$. En effet, pour $k \geq 0$, on a

$$\begin{aligned}
r(k) &= E\left[x_n x_{n+k}\right] \\
&= \sum_{a,b} abP\left[x_n = a, x_{n+k} = b\right] \\
&= \sum_{a,b} abP\left[x_{n+k} = b \middle| x_n = a\right] P\left[x_n = a\right] \\
&= \sum_{a,b} \left(aP\left[x_n = a\right]\right) bp_{ab}^{(k)}
\end{aligned}$$

où $p_{ab}^{(k)}$ est l'élément situé à la ligne a et à la colonne b de P^k, où P est la matrice de transition de la chaîne de Markov. On peut écrire $r(k)$ sous la forme

$$r(k) = [...]P^k[\vdots]$$

La matrice P admet l valeurs propres non nulles notées $\lambda_1, ..., \lambda_l$. On a alors

$$P = QDQ^T$$

où D =diag$(0, ..., 0, \lambda_1, ..., \lambda_l)$ et

$$P^k = QD^kQ^T$$

On en déduit

$$r(k) = \sum_{i=1}^{l} a_i \lambda_i^{|k|}$$

Il suffit alors de déterminer les valeurs des coefficients a_i.
Exemple : considérons la matrice de transition

$$P = \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 & 0 \\ 1/3 & 0 & 2/3 \\ 2/3 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}$$

associée à trois états $\{0, 1, -1\}$ qui admet comme probabilités limites $\left[\frac{3}{7}, \frac{2}{7}, \frac{2}{7}\right]$.
Les valeurs propres de P se déterminent classiquement comme suit

$$\det(P - \lambda I) = 0$$

On a alors

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1/3-\lambda & 2/3 & 0 \\ 1/3 & -\lambda & 2/3 \\ 2/3 & 0 & 1/3-\lambda \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2/3 & 0 \\ 1-\lambda & -\lambda & 2/3 \\ 1-\lambda & 0 & 1/3-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (1-\lambda)\left(\lambda^2 + \frac{\lambda}{3} + \frac{2}{9}\right) \\ &= (1-\lambda)(\lambda - \lambda_0)(\lambda - \lambda_0^*) \end{aligned}$$

avec

$$\lambda_0 = -\frac{1}{6} + \frac{i}{2}\sqrt{\frac{7}{9}} = \frac{-1 + i\sqrt{7}}{6}$$

On a donc

$$r(k) = a + b\lambda_0^{|k|} + c\lambda_0^{*|k|}$$

Puisque $r(k) \in \mathbb{R}$, on a $a \in \mathbb{R}$ et $c = b^*$. Il suffit donc de trouver a et b. La moyenne de la chaine stationnarisée est

$$E[x_n] = 0 \times \frac{3}{7} + 1 \times \frac{2}{7} + (-1) \times \frac{2}{7} = 0$$

Le spectre associé n'a donc pas de composante continue, ce qui se traduit par

$$a = 0 \text{ car } s(f) = \mathrm{TF}\left[a\right] = a\delta\left(f\right)$$

On calcule alors des valeurs particulières de $r(k)$, par exemple $k = 0$

$$\begin{aligned} E\left[x_n^2\right] &= 0^2 \times \frac{3}{7} + 1^2 \times \frac{2}{7} + (-1)^2 \times \frac{2}{7} = \frac{4}{7} \\ &= 2\left(b + c\right) = 2\mathrm{Re}\left(b\right) \end{aligned}$$

d'où

$$\mathrm{Re}\left(b\right) = \frac{2}{7}$$

Pour $k = 1$, on a

$$\begin{aligned} r(1) &= E\left[x_n x_{n+1}\right] \\ &= 1 \times P\left[x_n x_{n+1} = 1\right] + (-1) \times P\left[x_n x_{n+1} = -1\right] \end{aligned}$$

Mais

$$\begin{aligned} P\left[x_n x_{n+1} = 1\right] &= P\left[\left. x_{n+1} = 1 \right| x_n = 1\right] P\left[x_n = 1\right] \\ &\quad + P\left[\left. x_{n+1} = -1 \right| x_n = -1\right] P\left[x_n = -1\right] \\ &= 0 \times \frac{2}{7} + \frac{1}{3} \times \frac{2}{7} \\ &= \frac{2}{21} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} P\left[x_n x_{n+1} = -1\right] &= P\left[\left. x_{n+1} = -1 \right| x_n = 1\right] P\left[x_n = 1\right] \\ &\quad + P\left[\left. x_{n+1} = 1 \right| x_n = -1\right] P\left[x_n = -1\right] \\ &= \frac{2}{3} \times \frac{2}{7} + 0 \times \frac{2}{7} \\ &= \frac{4}{21} \end{aligned}$$

Soit

$$\begin{aligned} r(1) &= \frac{2}{21} - \frac{4}{21} = -\frac{2}{21} \\ &= 2\mathrm{Re}\left(b\lambda_0\right) \end{aligned}$$

d'où

$$\mathrm{Re}\left(b\lambda_0\right) = -\frac{1}{21} \Rightarrow \mathrm{Im}\left(b\right) = 0$$

On a finalement

$$r(k) = \frac{2}{7}\left(\frac{-1+i\sqrt{7}}{6}\right)^{|k|} + \frac{2}{7}\left(\frac{-1-i\sqrt{7}}{6}\right)^{|k|}$$

On en déduit le spectre de la chaîne de Markov à l'aide de la relation

$$s(f) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} r\left(k\right) e^{-2i\pi kf}$$

On obtient alors, en posant $a = \frac{1}{6}\left(-1+i\sqrt{7}\right)$,

$$\begin{aligned}
\frac{7}{2}s(f) &= \sum_{k=0}^{\infty} a^k e^{-2i\pi kf} + \sum_{k=-\infty}^{-1} a^{-k} e^{-2i\pi kf} + \sum_{k=0}^{\infty} \overline{a}^k e^{-2i\pi kf} + \sum_{k=-\infty}^{-1} \left(\overline{a}\right)^{-k} e^{-2i\pi kf} \\
&= \frac{1}{1-ae^{-j2\pi f}} + \frac{1}{1-ae^{j2\pi f}} - 1 + \frac{1}{1-\overline{a}e^{-j2\pi f}} + \frac{1}{1-\overline{a}e^{j2\pi f}} - 1
\end{aligned}$$

Mais

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1-ae^{-j2\pi f}} + \frac{1}{1-\overline{a}e^{j2\pi f}} - 1 &= \frac{1-|a|^2}{\left|1-ae^{-j2\pi f}\right|^2} \\
\frac{1}{1-\overline{a}e^{-j2\pi f}} + \frac{1}{1-ae^{j2\pi f}} - 1 &= \frac{1-|a|^2}{\left|1-\overline{a}e^{-j2\pi f}\right|^2}
\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}
s(f) &= \frac{2}{7}\left(1-|a|^2\right)\left[\frac{1}{\left|1-ae^{-j2\pi f}\right|^2} + \frac{1}{\left|1-\overline{a}e^{-j2\pi f}\right|^2}\right] \\
&= \frac{2}{7}\left(1-|a|^2\right)\frac{\left|1-ae^{-j2\pi f}\right|^2 + \left|1-\overline{a}e^{-j2\pi f}\right|^2}{\left|1-ae^{-j2\pi f}\right|^2\left|1-\overline{a}e^{-j2\pi f}\right|^2}
\end{aligned}$$

On peut toujours exprimer la densité spectrale de puissance d'une chaîne de Markov comme celle d'une suite ARMA (voir section suivante pour la définition et les propriétés d'une suite ARMA). Il est évident de factoriser le dénominateur sous la forme

$$\left|B\left(e^{-j2\pi f}\right)\right|^2$$

Pour le numérateur, on peut utiliser le théorème de Fejér-Riesz qui dit que tout polynome trigonométrique en $e^{-j2\pi f}$ à valeurs positives s'écrit sous la forme

$$\left|P\left(e^{-j2\pi f}\right)\right|^2$$

Dans le cas précédent, on a par exemple en posant $z = e^{j2\pi f}$ et $a = re^{j\theta}$

$$\begin{aligned} \left|1 - ae^{-j2\pi f}\right|^2 + \left|1 - \overline{a}e^{-j2\pi f}\right|^2 &= 2\left(1 + r^2\right) - (2r\cos\theta)\left(e^{-j2\pi f} + e^{j2\pi f}\right) \\ &= (-2r\cos\theta)\, e^{-j2\pi f}\left[z^2 - z\frac{1+r^2}{r\cos\theta} + 1\right] \end{aligned}$$

Le discriminant de l'équation en z ci-desssus est

$$\begin{aligned} \Delta &= \left(\frac{1+r^2}{r\cos\theta}\right)^2 - 4 \\ &= \frac{\left(1+r^2\right)^2 - 4\left(r\cos\theta\right)^2}{\left(r\cos\theta\right)^2} \\ &= \frac{\left(1+r^2+2r\cos\theta\right)\left(1+r^2-2r\cos\theta\right)}{\left(r\cos\theta\right)^2} > 0 \end{aligned}$$

Comme le produit des racines de cette équation est égal à 1, on a

$$z^2 - z\frac{1+r^2}{r\cos\theta} + 1 = (z - \mu)\left(z - \frac{1}{\mu}\right)$$

avec $\mu \in \mathbb{R}$. On en conclut

$$\begin{aligned} \left|1 - ae^{-j2\pi f}\right|^2 + \left|1 - \overline{a}e^{-j2\pi f}\right|^2 &= (-2r\cos\theta)\, e^{-j2\pi f}(z - \mu)\left(z - \frac{1}{\mu}\right) \\ &= \frac{2r\cos\theta}{\mu}\left(e^{j2\pi f} - \mu\right)\left(e^{-j2\pi f} - \mu\right) \\ &= \frac{2r\cos\theta}{\mu}\left|e^{-j2\pi f} - \mu\right|^2 \end{aligned}$$

On voit donc que la densité spectrale de puissance $s(f)$ peut se mettre sous la forme

$$s(f) = \left|\frac{A\left(e^{-j2\pi f}\right)}{B\left(e^{-j2\pi f}\right)}\right|^2$$

avec par exemple

$$\begin{aligned} A\left(e^{-j2\pi f}\right) &= C\left(e^{-j2\pi f} - \mu\right) \\ C &= \frac{2}{7\mu}\sqrt{\left(1 - |a|^2\right)(2r\cos\theta)} \\ B\left(e^{-j2\pi f}\right) &= \left(1 - ae^{-j2\pi f}\right)\left(1 - \overline{a}e^{-j2\pi f}\right) \end{aligned}$$

On en conclut

$$\frac{A(z)}{B(z)} = C\frac{z^{-1} - \mu}{\left(1 - az^{-1}\right)\left(1 - \overline{a}z^{-1}\right)}$$

Si e_n est le bruit blanc de la suite ARMA de fonction de transfert $\frac{A(z)}{B(z)}$, on a

$$\left(1 - az^{-1}\right)\left(1 - \overline{a}z^{-1}\right) X(z) = C\left(z^{-1} - \mu\right) E(z)$$

d'où

$$x_n - (a + \overline{a})x_{n-1} + |a|^2\, x_{n-2} = C\left(e_{n-1} - \mu e_n\right)$$

4 Suites ARMA

4.1 Définitions

La suite $\{x_n, n = 0, \pm 1, \pm 2, ...\}$ est appelée suite ARMA(p, q) si elle est stationnaire et si elle vérifie l'équation de récurrence

$$\sum_{k=0}^{p} a_k x_{n-k} = \sum_{k=0}^{q} b_k e_{n-k}, \tag{2.5}$$

où a_k et $b_k, k = 0, ..., n$ sont des nombres réels[1] et où e_n est un bruit blanc (de moyenne nulle) et de fonction d'autocorrélation

$$r_e(n) = \begin{cases} \sigma_e^2 \text{ si } n = 0 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

Remarques :

- En général, on suppose $a_0 = b_0 = 1$ sans perte de généralité
- Suites AR et MA
- On suppose que le numérateur $B(z)$ et le dénominateur $A(z)$ n'ont pas de zéros communs, ou alors on simplifie. La transmittance $\frac{B(z)}{A(z)}$ est donc une fraction rationnelle.

4.2 Densité spectrale de puissance

L'expression de la densité spectrale de puissance de la suite $\{x_n, n = 0, \pm 1, \pm 2, ...\}$ découle de la relation de filtrage linéaire entre x_n et e_n. En prenant la transformée en Z de l'équation (2.5), on obtient

$$\left(\sum_{k=0}^{p} a_k z^{-k} \right) X(z) = \left(\sum_{k=0}^{q} b_k z^{-k} \right) E(z)$$

d'où

$$H(z) = \frac{X(z)}{E(z)} = \frac{\sum_{k=0}^{q} b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^{p} a_k z^{-k}}$$

D'après la relation de Wiener-Lee, on en déduit

$$s_x(f) = \sigma_e^2 \left| \frac{\sum_{k=0}^{q} b_k e^{-j2\pi k f}}{\sum_{k=0}^{p} a_k e^{-j2\pi k f}} \right|^2$$

qui montre que la densité spectrale de puissance d'une suite ARMA est une fraction rationnelle en $e^{-j2\pi f}$.

[1] On pourrait travailler avec des suites de nombres complexes a_k et $b_k, k = 0, ..., n$ mais on ne le fera pas dans ce cours.

4.3 Expression de x_n en fonction de e_n

Exemple du processus AR(1)

- On considère la suite AR(1) définie par

$$x_n = ax_{n-1} + e_n \text{ avec } |a| < 1 \tag{2.6}$$

dont la transformée en Z est

$$H(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}} = \frac{z}{z - a}$$

Cette fonction de transfert admet un seul pôle $z = a$ situé à l'**intérieur** du cercle unité. Dans le domaine fréquentiel, on a

$$H(f) = \frac{1}{1 - ae^{-j2\pi f}} = \sum_{k=0}^{\infty} a^k e^{-j2k\pi f}$$

puisque

$$\left| ae^{-j2\pi f} \right| = |a| < 1$$

On en conclut

$$X(z) = \left(\sum_{k=0}^{\infty} a^k z^{-k} \right) E(z)$$

d'où

$$x(n) = \sum_{k=0}^{\infty} a^k e(n-k) \tag{2.7}$$

On remarquera que

  - La solution (2.7) est **causale**, c'est-à-dire que $x(n)$ ne dépend que des entrées $e(n), e(n-1), \ldots$ associées à des instants k situés dans le passé, i.e tels que $k \leq n$.
  - L'écriture (2.7) signifie qu'il y a convergence en probabilité de $\sum_{k=0}^{p} a^k e(n-k)$ vers $x(n)$ lorsque $p \to \infty$. La convergence est également vérifiée en moyenne quadratique (voir [1, p. 79])

$$E\left[\left| x(n) - \sum_{k=0}^{p} a^k e(n-k) \right|^2 \right] \underset{p \to \infty}{\longrightarrow} 0$$

- On vérifie que $x(n)$ défini par (2.7) est une suite stationnaire puisque

$$\begin{aligned}
E\left[x(n)\right] &= 0 \\
E\left[x(n)x(n+p)\right] &= \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty} a^{k+l} E\left[e(n-k)e(n+p-l)\right] \\
&= \left\{ \begin{array}{l} \sigma_e^2 \sum_{k=0}^{\infty} a^{2k+p} \text{ si } p \geq 0 \\ \sigma_e^2 \sum_{k=-p}^{\infty} a^{2k+p} \text{ si } p < 0 \end{array} \right. \\
&= \left\{ \begin{array}{l} \sigma_e^2 \frac{a^p}{1-a^2} \text{ si } p \geq 0 \\ \sigma_e^2 \frac{a^{-p}}{1-a^2} \text{ si } p < 0 \end{array} \right. \\
&= \sigma_e^2 \frac{a^{|p|}}{1-a^2}, \qquad p \in \mathbb{Z}
\end{aligned}$$

- On peut montrer qu'il y a unicité de la solution de (2.6) et donc que cette solution est (2.7).

- On considère désormais la suite AR(1) définie par

$$x_n = a x_{n-1} + e_n \text{ avec } |a| > 1$$

dont la transformée en Z est

$$H(z) = \frac{1}{1 - a z^{-1}} = \frac{z}{z-a}$$

Cette fonction de transfert admet un seul pôle $z = a$ situé à l'**extérieur** du cercle unité. Dans le domaine fréquentiel, on a

$$\begin{aligned}
H(f) &= \frac{1}{1 - a e^{-j2\pi f}} \\
&= \left(\frac{1}{-a}\right) \frac{e^{j2\pi f}}{1 - \frac{1}{a} e^{j2\pi f}} \\
&= -\frac{e^{j2\pi f}}{a} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{a^k} e^{j2k\pi f} \\
&= -\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{a^{k+1}} e^{j2(k+1)\pi f}
\end{aligned}$$

On obtient donc

$$X(z) = -\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{a^{k+1}} z^{k+1}\right) E(z)$$

d'où la solution finale

$$x(n) = -\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{a^{k+1}} e(n+k+1)$$

On remarquera que cette solution est **anticausale**, c'est-à-dire que $x(n)$ ne dépend que des entrées $e(n+1), e(n+2), ...$ associées à des instants k situés dans le futur, i.e. tels que $k > n$.

*Remarque : o*n démontre qu'il n'y a pas de solution stationnaire de (2.6) si $|a| = 1$ (voir [1, Problème 3.4, p. 110])

Cas Général

- On montre que $x(n)$ est inversible, c'est à-dire s'écrit sous la forme causale

$$x(n) = \sum_{k=0}^{\infty} h_k e(n-k)$$

si et seulement si la fonction de transfert $H(z)$ possède tous ses pôles à l'intérieur du cercle unité (voir [1, Theorème 3.1.2, p. 86]).

- Dans le cas plus général où la fonction de transfert $H(z)$ possède certains pôles à l'intérieur du cercle unité (mais pas sur le cercle unité) on a

$$x(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_k e(n-k)$$

4.4 Autocorrélations dans le cas causal

Suite ARMA

Dans le cas d'une suite ARMA, en multipliant l'équation (2.5) par x_{n-i} et en prenant l'espèrance, on obtient

$$\sum_{k=0}^{p} a_k r\left(i-k\right) = \sum_{k=0}^{q} b_k E\left[x_{n-i} e_{n-k}\right],$$

Si la suite $\{x_n, n = 0, \pm 1, \pm 2, ...\}$ est causale, on a une décomposition sous la forme

$$x_n = \sum_{j=0}^{\infty} h_j e_{n-j},$$

c'est-à-dire que x_n ne dépend que du passé de l'entrée $\{e_n, e_{n-1}, ...\}$. On doit donc distinguer deux cas

- $i \geq q+1$

  Dans ce cas, puisque x_{n-i} ne dépend que de $e_{n-i}, e_{n-i-1}, ...$ et que les entrées intervenant dans le second membre sont $e_n, e_{n-1}, ..., e_{n-q}$, on a

$$E\left[x_{n-i}e_{n-k}\right] = 0, \qquad \forall k = 0, ..., q$$

  d'où

$$\sum_{k=0}^{p} a_k r\left(i-k\right) = 0 \Leftrightarrow r(i) = \sum_{k=1}^{p} a_k r\left(i-k\right)$$

- $i \in \{0, ..., q\}$

  Dans ce cas, on a

$$\begin{aligned} E\left[x_{n-i}e_{n-k}\right] &= \sum_{j=0}^{\infty} h_j E\left[e_{n-i-j}e_{n-k}\right] \\ &= h_{k-i}\sigma_e^2 \end{aligned}$$

  Comme $h_{k-i} = 0$ pour $k < i$, on a

$$\sum_{k=0}^{q} b_k E\left[x_{n-i}e_{n-k}\right] = \sigma_e^2 \sum_{k=i}^{q} b_k h_{k-i}$$

  et donc

$$r(i) = \sum_{k=1}^{p} a_k r\left(i-k\right) + \sigma_e^2 \sum_{k=i}^{q} b_k h_{k-i}$$

Suite AR

Dans le cas d'une suite AR, on a $q = 0$ et donc

- $i \geq 1$

$$r(i) = \sum_{k=1}^{p} a_k r\left(i-k\right)$$

- $i = 0$

$$\begin{aligned} r(0) &= \sum_{k=1}^{p} a_k r\left(-k\right) + \sigma_e^2 \\ &= \sum_{k=1}^{p} a_k r\left(k\right) + \sigma_e^2 \end{aligned}$$

Ces équations sont connues sous le nom d'équations de Yule-Walker et sont classiquement utilisées dans la plupart des méthodes d'estimation des paramètres a_k, pour $k = 1, ..., p$. Elles permettent aussi de déterminer les autocorrélations de la suite x_n en fonction des paramètres a_k. Par exemple dans, le cas d'un modèle AR(1), on obtient

$$r(k) = \frac{a_1^{|k|}}{1 - a_1^2}\sigma_e^2, \qquad k \in \mathbb{Z}$$

Suite MA

Pour une suite MA(q) définie par

$$x_n = \sum_{k=0}^{q} b_k e_{n-k},$$

on obtient

- $i \geq q + 1$

$$r(i) = 0$$

- $i \in \{0, ..., q\}$

$$\begin{aligned} r(i) &= \sigma_e^2 \sum_{k=i}^{q} b_k b_{k-i} \\ &= \sigma_e^2 \sum_{j=0}^{q-i} b_j b_{j+i} \\ &= \sigma_e^2 \left(b_0 b_i + b_1 b_{i+1} + ... + b_{q-i} b_q\right) \end{aligned}$$

On notera en particulier que $r(q + 1) = 0$ et que

$$r(q) = b_0 b_q = b_q \neq 0$$

Ces deux dernières relations seront pratiques pour déterminer l'ordre du modèle MA.

5 Innovations

On considère une suite stationnaire $x_n, n \in \mathbb{Z}$ de moyenne nulle, de fonction d'autocorrélation $r(m), m \in \mathbb{Z}$ et de densité spectrale de puissance $s(f)$.

5.1 Définitions

1) Soit H_n le sous espace engendré par $\{x_{t,}t \leq n\}$ (le passé et le présent de x_n). L'**innovation** de x_n est définie par

$$u_n = x_n - P_{H_{n-1}}(x_n) .$$

Il est clair que **l'innovation u_n est un élément de H_n** (car $P_{H_{n-1}}(x_n)$ est élément de H_{n-1} que l'on notera $\widehat{x}_n$). On pose

$$H_{-\infty} = \bigcap_{n=-\infty}^{\infty} H_n$$

2) Soit $H_{n,p}$ le sous espace engendré par $\{x_{t,}n-p+1 \leq t \leq n\}$ (le passé proche et le présent de x_n). L'**innovation partielle** de x_n est définie par

$$u_{n,p} = x_n - P_{H_{n-1,p}}(x_n)$$

Il est clair que **l'innovation $u_{n,p}$ est un élément de $H_{n,p}$** (car $P_{H_{n-1,p}}(x_n)$ est élément de $H_{n-1,p}$,que l'on notera $\widehat{x}_{n,p}$). On peut montrer (voir par exemple [2, p. 19])

$$\widehat{x}_n = \lim_{p\to\infty} \widehat{x}_{n,p} \text{ et } u_n = \lim_{p\to\infty} u_{n,p}$$

5.2 Orthogonalité

Théorème : La suite des innovations $\{u_n, n \in \mathbb{Z}\}$ est constituée de variables aléatoires non-corrélées (orthogonales)
Preuve : par définition de la projection orthogonale, u_n est orthogonale à l'espace H_{n-1}, et donc orthogonale à u_{n-1}. Mais

$$H_{-\infty} \subset \ldots \subset H_{n-2} \subset H_{n-1} \subset H_n \subset \ldots \subset H_\infty$$

donc

$$\ldots \subset H_{n-1}^{\perp} \subset H_{n-2}^{\perp} \subset H_{n-3}^{\perp} \subset \ldots$$

En conséquence, u_n est aussi orthogonale à $u_{n-2}, u_{n-3}, ...$ c'est-à-dire que u_n est orthogonale à toutes les innovations $u_t, t \leq n$. En faisant de même, on montre que u_{n+1} est orthogonale à u_n, puis que u_{n+2} est orthogonale à u_n, etc ...
Remarque : la suite des innovations n'est pas nécessairement constituée de variables aléatoires indépendantes [2, p. 21]

5.3 Stationnarité

Nous allons montrer que la suite $u_n, n \in Z$, est une suite stationnaire de moyenne nulle et de variance finie.
Comme $\widehat{x}_{n,p} \in H_{n-1,p}$, on a

$$\widehat{x}_{n,p} = -\sum_{k=1}^{p} \alpha_{k,p}(n) x_{n-k}$$

et donc

$$u_{n,p} = x_n - \widehat{x}_{n,p} = x_n + \sum_{k=1}^{p} \alpha_{k,p}(n) x_{n-k}$$

Si on multiplie tout par x_{n-l} avec $l = 1, ..., p$, on obtient

$$u_{n,p} x_{n-l} = x_n x_{n-l} + \sum_{k=1}^{p} \alpha_{k,p}(n) x_{n-k} x_{n-l}$$

d'où, par définition de la projection orthogonale

$$E\left[u_{n,p} x_{n-l}\right] = 0 = E\left[x_n x_{n-l}\right] + \sum_{k=1}^{p} \alpha_{k,p}(n) E\left[x_{n-k} x_{n-l}\right]$$

Si on pose $\alpha_p(n) = [\alpha_{1,p}(n), ..., \alpha_{p,p}(n)]^T$, $r = [r(1), ..., r(p)]^T$ et

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} r(0) & r(-1) & \cdots & r(p-1) \\ r(1) & r(0) & \cdots & r(p-2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ r(p-1) & r(p-2) & \cdots & r(0) \end{pmatrix},$$

on obtient

$$\alpha_p(n) = -\mathbf{R}^{-1} r$$

Le vecteur des coefficients $\alpha_p(n)$ est donc indépendant de n.

La fonction d'autocorrélation de la suite des innovations partielles est définie par

$$E\left[u_{n,p} u_{n-m,p}\right] = E\left[\sum_{k=0}^{p} \alpha_{k,p} x_{n-k} \sum_{l=0}^{p} \alpha_{l,p} x_{n-m-l}\right]$$

avec $\alpha_{0,p} = 1$. On en déduit

$$E\left[u_{n,p} u_{n+m,p}\right] = \sum_{k=0}^{p} \sum_{l=0}^{p} \alpha_{k,p} \alpha_{l,p} r(m + l - k)$$

qui est une expression indépendante de n. La suite des innovations partielles est donc stationnaire. On notera que la variance des innovations partielles est

$$\sigma_p^2 = E\left[u_{n,p} u_{n,p}\right] = \sum_{k=0}^{p} \sum_{l=0}^{p} \alpha_{k,p} \alpha_{l,p} r(l-k)$$

qui est bien sur une quantité indépendante de n. Tout ce qui a été fait avec la suite des innovations partielles reste vrai pour la suite des innovations. En effet

$$E\left[u_n u_{n-m}\right] = \lim_{p\to\infty} E\left[u_{n,p} u_{n-m,p}\right]$$

Comme le membre de droite $E\left[u_{n,p} u_{n-m,p}\right]$ est indépendant de n pour toute valeur de p, on en déduit que la limite

$$\lim_{p\to\infty} E\left[u_{n,p} u_{n-m,p}\right]$$

est aussi indépendante de n. On en conclut que **la suite des innovations est stationnaire**. En vertu de la définition de la projection orthogonale

$$\begin{aligned}
\sigma_p^2 &= E\left[|x_n - \widehat{x}_{n,p}|\right]^2 \\
&= \langle x_n - \widehat{x}_{n,p}, x_n - \widehat{x}_{n,p} \rangle \\
&= \langle x_n, x_n - \widehat{x}_{n,p} \rangle \\
&= r(0) + \sum_{k=1}^{p} \alpha_{k,p} r(k)
\end{aligned}$$

La variance des innovations s'obtient par passage à la limite

$$\sigma^2 = \lim_{p\to\infty} \sigma_p^2$$

qui est une quantité indépendante de n. Cette propriété découle directement de la stationarité de la suite $x_n, n \in \mathbb{Z}$.

5.4 Suites déterministes et régulières

Nous avons montré précédemment que la variance de l'innovation u_n était indépendante de n, soit

$$\sigma^2 = E\left[|x_n - \widehat{x}_n|\right]^2$$

- Si $\sigma^2 = 0$, on dit que la suite x_n est **déterministe**. On a alors $u_n = 0$ presque surement et

$$\widehat{x}_n = \lim_{p\to\infty} \widehat{x}_{n,p} = -\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k x_{n-k}$$

c'est-à dire que la suite est parfaitement prédictible à partir de son passé. C'est le cas des processus définis par

$$x_n = c_0 + \sum_i c_i e^{j2\pi f_i n}$$

où c_i sont des variables aléatoires de moyennes nulles.

- Si $\sigma^2 > 0$, on dit que la suite x_n est **régulière** et l'erreur de prédiction (i.e. la variance des innovations) est strictement positive.

  Remarque : On a l'habitude de normaliser l'innovation de façon à ce que sa puissance soit égale à $\sigma^2 = 1$. Ceci revient à définir l'innovation u_n comme suit

  $$u_n = \frac{x_n - P_{H_{n-1}}(x_n)}{\left\|x_n - P_{H_{n-1}}(x_n)\right\|}$$

  Á partir de maintenant, quand on parlera d'innovation, on aura $\sigma^2 = E\left[u_n^2\right] = 1$.

6 Décomposition de Wold

6.1 Intercorrélations

Théorème : la suite des intercorrélations

$$\beta_s = E\left[x_n u_{n-s}\right] = r_{xu}(s)$$

vérifie les propriétés suivantes

$$\beta_0 = 1 \text{ et } \sum_{s=0}^{\infty} \beta_s^2 < \infty$$

Preuve : On a

$$\begin{aligned} \beta_0 &= E\left[x_n u_n\right] \\ &= E\left[\left(u_n + \widehat{x}_n\right) u_n\right] \\ &= E\left[u_n^2\right] = 1 \end{aligned}$$

De plus, on a

$$E\left[\left|x_n - \sum_{s=0}^{m} \beta_s u_{n-s}\right|^2\right] \geq 0$$

d'où

$$E\left[x_n^2\right] - 2\sum_{s=0}^{m} \beta_s E\left[x_n u_{n-s}\right] + \sum_{s=0}^{m}\sum_{t=0}^{m} \beta_s \beta_t E\left[u_{n-s} u_{n-t}\right] \geq 0$$

c'est-à-dire, en utilisant l'orthogonalité des innovations

$$r(0) - 2\sum_{s=0}^{m} \beta_s^2 + \sum_{s=0}^{m} \beta_s^2 \geq 0$$

et finalement

$$\sum_{s=0}^{m} \beta_s^2 \leq r(0)$$

Comme ce résultat est valable pour toute valeur de m, il en est de même quand on fait le passage à la limite $m \to \infty$

$$\sum_{s=0}^{\infty} \beta_s^2 \leq r(0)$$

6.2 Décomposition de Wold

Toute suite stationnaire de moyenne nulle se décompose de la façon suivante

$$x_n = y_n + v_n = \sum_{s=0}^{\infty} \beta_s u_{n-s} + v_n,$$

avec

- (a) u_n et v_n sont des suites décorrélées

$$E\left[v_m u_n\right] = 0, \qquad \forall n, m$$

- (b) u_n est une variable aléatoire appartenant à H_n
- (c) v_n est une variable aléatoire appartenant à $H_{-\infty}$,
- (d) v_n est une suite déterministe
- (e) y_n est une suite régulière

Preuve
L'existence de la décomposition est évidente puisqu'il suffit de poser

$$\begin{aligned} y_n &= \sum_{s=0}^{\infty} E\left[x_n u_{n-s}\right] u_{n-s} \\ v_n &= x_n - y_n \end{aligned}$$

mais il faut vérifier que les suites y_n et v_n vérifie les propriétés (a), (b), (c) et (d). La propriété (a) est triviale à vérifier puisque

$$\begin{aligned} E\left[v_m u_n\right] &= E\left[\left(x_m - y_m\right) u_n\right] \\ &= r_{xu}(m-n) - \sum_{s=0}^{\infty} \beta_s E\left[u_{m-s} u_n\right] \\ &= \beta_{m-n} - \beta_{m-n} = 0 \end{aligned}$$

Pour les autres propriétés, on se réfèrera à [2, p. 22 et 23]. Notons avec soin que dans la décomposition de Wold, le processus $v_n \in H_{-\infty}$ est **déterministe** (ce qui signifie que $v_{n+j}, j \geq 1$ est **parfaitement prédictible en termes des éléments** $v_t, t \leq n$) et la partie $\sum_{s=0}^{\infty} \beta_s u_{n-s}$ est un MA(∞).

Remarques

- **Sommes directes**

  On montre que

$$\begin{aligned} H_n &= H_{n-1} \oplus \{u_n\} \\ &= H_{n-2} \oplus \{u_{n-1}\} \oplus \{u_n\} \\ &= \ldots \\ &= H_{-\infty} \oplus \{u_t, t \leq n\} \end{aligned}$$

- **Espace engendré par les innovations**

  On montre que [1, p. 189]

$$\overline{\mathrm{sp}}\{u_t, t \leq n\} = \overline{\mathrm{sp}}\{y_t, t \leq n\}$$

  où $\overline{\mathrm{sp}}\{u_t, t \leq n\}$ désigne l'espace engendré par les variables aléatoires $u_t, t \leq n$ et y_n est la partie régulière de la décomposition de Wold.

- **Cas particuliers**

  - **Suites purement déterministes**
    Quand $\sigma^2 = 0$, on a

    $$H_n = H_{n-1} = H_{n-2} = ... = H_{-\infty}.$$

    $x_n = v_n$ est purement déterministe (on parle parfois de processus prédictible). Dans ce cas, la partie liée à l'innovation n'existe pas. On peut montrer que les processus purement déterministes ont des spectres de raies (i.e. contiennent des périodicités) et inversement. Un exemple simple de suite purement déterministes est

    $$x_n = \alpha,$$

    où α est une variable aléatoire. On a dans ce cas

    $$\widehat{x}_n = E\left[x_n | \, x_{n-1}, x_{n-2}, ...\right] = \alpha = x_n$$

    et donc

    $$u_n = x_n - \widehat{x}_n = 0.$$

    Un autre exemple de suite purement déterministe est

    $$x_n = A\cos\left(2\pi f_0 n + \theta\right),$$

    où θ est une phase aléatoire uniforme sur $[0, 2\pi[$. On montre facilement que cette suite vérifie la récursion

    $$x_n = 2\cos\left(2\pi f_0\right) x_{n-1} - x_{n-2}$$

    d'où

    $$\widehat{x}_n = E\left[x_n | \, x_{n-1}, x_{n-2}, ...\right] = x_n$$

    et à nouveau

    $$u_n = x_n - \widehat{x}_n = 0.$$

  - Quand $\sigma^2 \neq 0$ et $v_n = 0$, alors

    $$x_n = \sum_{s=0}^{\infty} \beta_s u_{n-s}.$$

    Il n'y a alors pas de partie déterministe dans x_n. C'est par exemple le cas d'un **bruit blanc Gaussien** (suite de variables aléatoires indépendantes de moyennes nulles) ou d'**une suite ARMA de moyenne nulle** dont les pôles et les zéros ne sont pas sur le cercle unité. Pour un bruit blanc Gaussien, on a

$$\widehat{x}_n = E\left[x_n | x_{n-1}, x_{n-2}, ...\right] = E\left[x_n\right] = 0$$

et donc

$$u_n = x_n - \widehat{x}_n = x_n$$

Ces suites sont appelées "indeterministic processes" dans [2].

6.3 Suites ARMA

Nous avons vu ci-dessus qu'une suite ARMA admettait la décomposition de Wold

$$x_n = \sum_{s=0}^{\infty} \beta_s u_{n-s}.$$

Cette expression montre que x_n s'obtient par filtrage causal de l'innovation. La fonction de transfert du filtre d'entrée u_n et de sortie x_n notée

$$\beta(z) = \sum_{s=0}^{\infty} \beta_s z^{-s}$$

admet donc tous ses pôles à l'intérieur du cercle unité. On peut se demander si cette représentation est inversible, c'est-à-dire s'il existe une suite de réels telle que

$$u_n = \sum_{s=0}^{\infty} \alpha_s x_{n-s}, \qquad \sum_{s=0}^{\infty} \alpha_s^2 < \infty$$

ou de manière équivalent si x_n est une suite AR (dont l'entrée est l'innovation u_n) définie par

$$x_n = -\sum_{s=1}^{\infty} \alpha_s x_{n-s} + u_n$$

Des conditions sur la fonction de transfert

$$\beta(z) = \sum_{s=0}^{\infty} \beta_s z^{-s}$$

assurant l'inversibilité de la représentation liant u_n et x_n sont données dans [2, p. 24]. Ces conditions se résument à l'absence de zéros et de pôles sur le cercle unité. Dans ce cas, puisque la représentation $u_n = T\left[x_n\right]$ est causale, tous les zéros de $\beta(z)$ sont à l'intérieur du cercle unité. On peut alors déterminer le filtre linéaire reliant x_n et u_n. En effet, si on connaît le spectre de x_n, on a

$$s_u(f) = 1 = s_x(f)\,|\alpha(f)|^2$$

d'où

$$|\alpha(f)|^2 = \frac{1}{s_x(f)}$$

On trouve alors $\alpha(f)$ en factorisant la fraction rationnelle $[s_x(f)]^{-1}$ et en choisissant les monômes associés aux pôles et zéros situés à l'intérieur du cercle unité. Dans ce qui suit, on considère plusieurs exemples simples permettant de comprendre comment on construit l'innovation d'une suite ARMA

- Exemple 1 : on considère une suite AR(1) définie par

$$x_n = ax_{n-1} + e_n \text{ avec } |a| < 1$$

et $\sigma_e^2 = E[e^2(n)] = 1$. On a alors

$$X(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}} E(z)$$

et

$$\begin{aligned} |\alpha(f)|^2 &= \frac{1}{s_x(f)} \\ &= \left|1 - ae^{-j2\pi f}\right|^2 \\ &= \left(1 - ae^{-j2\pi f}\right)\left(1 - ae^{j2\pi f}\right) \end{aligned}$$

Pour avoir un zéro à l'intérieur du cercle unité, il faut nécessairement que

$$\alpha(z) = 1 - az^{-1}$$

c'est-à-dire

$$U(z) = \left(1 - az^{-1}\right) X(z)$$

On en déduit

$$u_n = x_n - ax_{n-1} = e_n$$

On peut donc observer que l'innovation u_n est le bruit blanc d'entrée de la suite AR

- Exemple 2 : on considère une suite AR(1) définie par

$$x_n = ax_{n-1} + e_n \text{ avec } |a| > 1$$

et $\sigma_e^2 = E[e^2(n)] = 1$.On a alors

$$X(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}} E(z)$$

et

$$\begin{aligned}
|\alpha(f)|^2 &= \frac{1}{s_x(f)} \\
&= \left|1 - ae^{-j2\pi f}\right|^2 \\
&= \left(1 - ae^{-j2\pi f}\right)\left(1 - ae^{j2\pi f}\right) \\
&= a^2 \left(1 - \frac{1}{a} e^{j2\pi f}\right)\left(1 - \frac{1}{a} e^{-j2\pi f}\right)
\end{aligned}$$

Pour avoir un zéro à l'intérieur du cercle unité, il faut nécessairement que

$$\alpha(z) = a\left(1 - \frac{1}{a} z^{-1}\right) = a - z^{-1}$$

c'est-à-dire

$$U(z) = \left(a - z^{-1}\right) X(z)$$

On en déduit

$$u_n = ax_n - x_{n-1}$$

On peut donc observer que l'innovation u_n n'est pas le bruit blanc d'entrée de la suite AR

- Exemple 3 : on considère une suite MA(1) définie par

$$x_n = e_n - ae_{n-1} \text{ avec } |a| < 1$$

et $\sigma_e^2 = E[e^2(n)] = 1$. On a alors

$$X(z) = \left(1 - az^{-1}\right) E(z)$$

et

$$\begin{aligned}
|\alpha(f)|^2 &= \frac{1}{s_x(f)} \\
&= \frac{1}{\left|1 - ae^{-j2\pi f}\right|^2} \\
&= \frac{1}{\left(1 - ae^{-j2\pi f}\right)\left(1 - ae^{j2\pi f}\right)}
\end{aligned}$$

Pour avoir un pôle à l'intérieur du cercle unité, il faut nécessairement que

$$\begin{aligned}
\alpha(z) &= \frac{1}{1 - az^{-1}} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} a^k z^{-k}
\end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$U(z) = \left(\sum_{k=0}^{\infty} a^k z^{-k}\right) X(z)$$

On en déduit

$$u_n = \sum_{k=0}^{\infty} a^k x_{n-k} = e_n$$

On peut donc observer que l'innovation u_n est le bruit blanc d'entrée de la suite MA

- Exemple 4 : on considère une suite MA(1) définie par

$$x_n = e_n - ae_{n-1} \text{ avec } |a| > 1$$

et $\sigma_e^2 = E[e^2(n)] = 1$. On a alors

$$X(z) = \left(1 - az^{-1}\right) E(z)$$

et

$$\begin{aligned}
|\alpha(f)|^2 &= \frac{1}{s_x(f)} \\
&= \frac{1}{\left|1 - ae^{-j2\pi f}\right|^2} \\
&= \frac{1}{\left(1 - ae^{-j2\pi f}\right)\left(1 - ae^{j2\pi f}\right)} \\
&= \frac{1}{a^2\left(1 - \frac{1}{a}e^{j2\pi f}\right)\left(1 - \frac{1}{a}e^{-j2\pi f}\right)}
\end{aligned}$$

Pour avoir un pôle à l'intérieur du cercle unité, il faut nécessairement que

$$\begin{aligned}\alpha(z) &= \frac{1}{a\left(1-\frac{1}{a}z^{-1}\right)} \\ &= \frac{1}{a}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{a^k}z^{-k} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{a^{k+1}}z^{-k}\end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$U(z) = \left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{a^{k+1}}z^{-k}\right)X(z)$$

On en déduit

$$u_n = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{a^{k+1}}x_{n-k}$$

On peut donc observer que l'innovation u_n n'est pas le bruit blanc d'entrée de la suite MA.

6.4 Détermination des coefficients β_s

Á partir de la relation

$$x_n = \sum_{s=0}^{\infty}\beta_s u_{n-s} + v_n$$

et en utilisant le fait que les innovations sont orthogonales, on obtient

$$\langle x_n, u_p\rangle = \beta_p\langle u_p, u_p\rangle + \langle v_n, u_p\rangle .$$

Mais $\langle v_n, u_p\rangle = E\left[v_n u_p\right] = 0$ et $\langle u_p, u_p\rangle = 1$, d'où

$$\beta_p = E\left[x_n u_{n-p}\right].$$

6.5 Prédiction

On observe une suite stationnaire aux instants $t \leq 0$ et on cherche à estimer x_n avec $n > 0$ (prédire x_n) à l'aide du meilleur estimateur linéaire à partir des éléments $\{x_0, x_{-1}, ...\}$. La solution de ce problème est immédiate dans le cas où $v_n = 0$ dans la décomposition de Wold (i.e. par exemple pour les suites ARMA sans pôles, ni zéros sur le cercle unité). En effet, on a alors

$$x_n = \sum_{s=0}^{\infty} \beta_s u_{n-s},$$

Puisque les innovations intervenant dans cette décomposition sont orthogonales, on en déduit

$$\widetilde{x}_n = P_{H_0}(x_n) = \sum_{s=n}^{\infty} \beta_s u_{n-s}$$

et l'erreur associée est

$$\sigma_n^2 = E\left[(x_n - \widetilde{x}_n)^2\right] = \sum_{s=0}^{n-1} \beta_s^2.$$

Le problème est plus compliqué (et ne sera pas abordé dans ce cours) si

$$x_n = \sum_{s=0}^{\infty} \beta_s u_{n-s} + v_n$$

avec $v_n \neq 0$.

7 Exercices

7.1 Exercice 1

Enoncé

Soit $\mathbf{x} = \{x_n, n \in \mathbb{Z}\}$ la suite MA sur le bruit blanc Gaussien $\mathbf{e} = \{e_n, n \in \mathbb{Z}\}$ de variance unité définie par

$$x_n = e_n + 4e_{n-1} + 4e_{n-2}$$

Déterminer
1) la densité spectrale de puissance de x_n
2) l'innovation $\{u_n, n \in \mathbb{Z}\}$ de $\mathbf{x}$
3) la meilleure prédiction $\widetilde{x}_n$ de x_n sur l'espace H_0 engendré par les $x_m, m \leq 0$
4) l'erreur de prédiction

$$\sigma_n^2 = E\left[(x_n - \widetilde{x}_n)^2\right]$$

et l'erreur relative

$$\frac{\sigma_n^2}{E\left[x_0^2\right]}$$

5) la loi de probabilité de $x_n | \, x_0 = x$. En déduire

$$\overline{x}_n = E\left[x_n | \, x_0\right] \text{ et } \overline{\sigma}_n^2 = E\left[(x_n - \overline{x}_n)^2\right]$$

Solution

1) On a

$$X(z) = E(z)\left(1 + 4z^{-1} + 4z^{-2}\right)$$

c'est-à-dire

$$H(f) = \frac{X(f)}{E(f)} = 1 + 4e^{-j2\pi f} + 4e^{-j4\pi f} = \left(1 + 2e^{-j2\pi f}\right)^2$$

En utilisant la relation de Wiener-Lee, on obtient

$$\begin{aligned} s_x(f) &= \sigma_e^2 \left|H(f)\right|^2 \\ &= \left|1 + 2e^{-j2\pi f}\right|^4 \end{aligned}$$

2) On sait que pour une suite ARMA, l'innovation u_n est obtenue par filtrage linéaire de x_n. Si $\beta(f)$ est la transmittance de ce filtre, on a

$$s_u(f) = 1 = \left|\alpha(f)\right|^2 s_x(f)$$

d'où

$$|\alpha(f)|^2 = \frac{1}{s_x(f)}$$

et donc

$$|\alpha(f)|^2 = \frac{1}{|1+2e^{-j2\pi f}|^4}$$

Le pôle associé à $1+2z^{-1}=0$ est $z=-2$ qui est situé à l'extèrieur du cercle unité. On va donc utiliser la propriété suivante

$$\left|1+2e^{-j2\pi f}\right| = \left|1+2e^{j2\pi f}\right|$$

qui conduit à

$$\begin{aligned} |\alpha(f)|^2 &= \frac{1}{|1+2e^{j2\pi f}|^4} \\ &= \frac{1}{16\left|1+\frac{1}{2}e^{-j2\pi f}\right|^4} \end{aligned}$$

Pour avoir un filtre causal, il faut nécessairement que $\alpha(f)$ ait ses pôles à l'intérieur du cercle unité, i.e.

$$\alpha(f) = \frac{1}{4\left(1+\frac{1}{2}e^{-j2\pi f}\right)^2}$$

En utilisant le développement en série

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{k=0}^{\infty} z^k, \qquad |z|<1$$

on obtient

$$\frac{1}{(1-z)^2} = \sum_{k=1}^{\infty} kz^{k-1}, \qquad |z|<1$$

d'où

$$\alpha(f) = \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{\infty} k\left(-\frac{1}{2}e^{-j2\pi f}\right)^{k-1} \Longleftrightarrow \alpha(z) = \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{\infty} k\left(-\frac{1}{2}\right)^{k-1} z^{-k+1}$$

et finalement, l'innovation s'écrit

$$u_n = \sum_{k=1}^{\infty} k\frac{(-1)^{k-1}}{2^{k+1}} x_{n-k+1}$$

3) Inversement, il y a un filtre linéaire d'entrée u_n et de sortie x_n de transmittance

$$\begin{aligned}\beta(z) &= \frac{1}{\alpha(z)} \\ &= 4\left(1+\frac{1}{2}z^{-1}\right)^2 \\ &= 4+4z^{-1}+z^{-2}\end{aligned}$$

d'où

$$x_n = 4u_n + 4u_{n-1} + u_{n-2}$$

qui est une suite MA différente de celle définie sur le bruit e_n. La meilleure prédiction $\widetilde{x}_n$ de x_n sur l'espace H_0 engendré par les $x_m, m \leq 0$ est alors

$$\widetilde{x}_n = \begin{cases} x_n \text{ si } n \leq 0 \\ 4u_0 + u_{-1} \text{ si } n = 1 \\ u_0 \text{ si } n = 2 \\ 0 \text{ si } n > 2 \end{cases}$$

4) L'erreur de prédiction associée est définie par

$$\sigma_n^2 = \begin{cases} 0 \text{ si } n \leq 0 \\ 16 \text{ si } n = 1 \\ 32 \text{ si } n = 2 \\ 33 \text{ si } n > 2 \end{cases}$$

Puisque

$$x_0 = 4u_0 + 4u_{-1} + u_{-2}$$

la puissance de x_0 est

$$E\left[x_0^2\right] = 33$$

d'où l'erreur normalisée

$$\frac{\sigma_n^2}{E\left[x_0^2\right]} = \begin{cases} 0 \text{ si } n \leq 0 \\ \frac{16}{33} \text{ si } n = 1 \\ \frac{32}{33} \text{ si } n = 2 \\ 1 \text{ si } n > 2 \end{cases}$$

5) On a

$$\begin{aligned} x_0 &= 4u_0 + 4u_{-1} + u_{-2} \\ x_1 &= 4u_1 + 4u_0 + u_{-1} \\ x_2 &= 4u_2 + 4u_1 + u_0 \\ x_3 &= 4u_3 + 4u_2 + u_1 \\ &\ldots \end{aligned}$$

La loi du vecteur (x_n, x_0) est une loi normale de moyenne nulle et de matrice de covariance

$$\Sigma_n = \begin{pmatrix} 33 & c_n \\ c_n & 33 \end{pmatrix}$$

avec c_n =cov$(x_n, x_0) = E[x_n x_0]$. On sait que cette expression est paire par rapport à n donc il suffit de la calculer pour $n \geq 0$. On a

$$\begin{aligned} c_0 &= 33, c_1 = 20, c_2 = 4 \\ c_n &= 0, \qquad n > 2 \end{aligned}$$

Donc pour $|n| > 2$, les variables aléatoires x_n et x_0 sont indépendantes, d'où

$$\begin{aligned} \overline{x}_n &= E[x_n | x_0] = E[x_n] = 0 \\ E\left[(x_n - \overline{x}_n)^2\right] &= 33 \end{aligned}$$

Pour $|n| \leq 2$, on peut utiliser un résultat général sur les lois conditionnelles de vecteurs Gaussiens. Si (Y, Z) est un vecteur Gaussien de moyenne (m_Y, m_Z) et de matrice de covariance

$$\Sigma = \begin{pmatrix} C_Y & D \\ D^T & C_Z \end{pmatrix}$$

alors

$$Z|Y = y \sim \mathcal{N}\left(m_{z|y}, C_{z|y}\right)$$

avec

$$\begin{aligned} m_{z|y} &= m_Z - D^T C_y^{-1}(m_Y - Y) \\ C_{z|y} &= C_Z - D^T C_Y^{-1} D \end{aligned}$$

qui donne ici

$$x_n | x_0 \sim \mathcal{N}\left(\frac{c_n x_0}{33}, 33 - \frac{c_n^2}{33}\right)$$

d'où

$$\begin{aligned} x_2 | x_0 &\sim \mathcal{N}\left(\frac{c_2 x_0}{33}, 33 - \frac{c_2^2}{33}\right) = \mathcal{N}\left(\frac{4}{33}x_0, \frac{1073}{33}\right) \\ x_1 | x_0 &\sim \mathcal{N}\left(\frac{c_1 x_0}{33}, 33 - \frac{c_1^2}{33}\right) = \mathcal{N}\left(\frac{20}{33}x_0, \frac{689}{33}\right) \\ x_0 | x_0 &= x_0 \end{aligned}$$

On en déduit

$$\begin{aligned} \overline{x}_2 &= E[x_2 | x_0] = \frac{4}{33}x_0 \text{ et } \overline{\sigma}_2^2 = \frac{1073}{33} \\ \overline{x}_1 &= E[x_1 | x_0] = \frac{20}{33}x_0 \text{ et } \overline{\sigma}_1^2 = \frac{689}{33} \\ \overline{x}_0 &= E[x_0 | x_0] = x_0 \text{ et } \overline{\sigma}_0^2 = 0 \end{aligned}$$

7.2 Exercice 2 (Examen 18/1/2002)

Enoncé

Soit $\mathbf{x} = \{x_n, n \in \mathbb{Z}\}$ la suite ARMA sur le bruit blanc Gaussien $\mathbf{e} = \{e_n, n \in \mathbb{Z}\}$ (de moyenne nulle et de variance $\sigma_e^2 = 1$) définie par

$$x_n - 6x_{n-1} = 3e_n - e_{n-1}$$

Déterminer
1) la densité spectrale de puissance de x_n
2) l'innovation $\{u_n, n \in \mathbb{Z}\}$ de $\mathbf{x}$
3) pour $n > 0$, la meilleure prédiction $\widetilde{x}_n$ de x_n sur l'espace H_0 engendré par les $x_m, m \leq 0$
4) l'erreur de prédiction

$$\sigma_n^2 = E\left[(x_n - \widetilde{x}_n)^2\right]$$

et l'erreur relative

$$\frac{\sigma_n^2}{E\left[x_0^2\right]}$$

5) la loi de probabilité de $x_n | \, x_0 = x$. En déduire

$$\overline{x}_n = E\left[x_n | \, x_0\right] \text{ et } \overline{\sigma}_n^2 = E\left[(x_n - \overline{x}_n)^2\right]$$

6) Exprimer x_n en fonction de la suite des entrées $\mathbf{e} = \{e_n, n \in \mathbb{Z}\}$.

Solution

1) On a

$$X(z)(1 - 6z^{-1}) = E(z)\left(3 - z^{-1}\right)$$

c'est-à-dire

$$H(z) = \frac{X(z)}{E(z)} = \frac{3 - z^{-1}}{1 - 6z^{-1}}$$

ou de manière équivalente

$$H(f) = \frac{X(f)}{E(f)} = \frac{3 - e^{-j2\pi f}}{1 - 6e^{-j2\pi f}}$$

En utilisant la relation de Wiener-Lee, on obtient

$$\begin{aligned} s_x(f) &= \sigma_e^2 \left|H(f)\right|^2 \\ &= \left|\frac{3 - e^{-j2\pi f}}{1 - 6e^{-j2\pi f}}\right|^2 \end{aligned}$$

2) On sait que pour une suite ARMA, l'innovation u_n est obtenue par filtrage linéaire de x_n. Si $\alpha(f)$ est la transmittance de ce filtre, on a

$$s_e(f) = 1 = |\alpha(f)|^2 \, s_x(f)$$

d'où

$$|\alpha(f)|^2 = \frac{1}{s_x(f)}$$

et donc

$$\begin{aligned} |\alpha(f)|^2 &= \frac{\left|1 - 6e^{-j2\pi f}\right|^2}{|3 - e^{-j2\pi f}|^2} \\ &= \frac{4\left|1 - \frac{1}{6}e^{-j2\pi f}\right|^2}{\left|1 - \frac{1}{3}e^{-j2\pi f}\right|^2} \end{aligned}$$

Pour avoir un filtre causal inversible, il faut nécessairement que $\alpha(f)$ ait ses pôles et ses zéros à l'intérieur du cercle unité, i.e.

$$\begin{aligned} \alpha(f) &= \frac{2\left(1 - \frac{1}{6}e^{-j2\pi f}\right)}{1 - \frac{1}{3}e^{-j2\pi f}} \\ &= 1 + \frac{1}{1 - \frac{1}{3}e^{-j2\pi f}} \end{aligned}$$

En utilisant le développement en série

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{k=0}^{\infty} z^k, \qquad |z| < 1$$

on obtient

$$\alpha(f) = 1 + \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3}e^{-j2\pi f}\right)^k = 2 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^k e^{-j2\pi k f}$$

c'est-à-dire

$$\alpha(z) = 2 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^k z^{-k}$$

et finalement, l'innovation s'écrit

$$u_n = 2x_n + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^k x_{n-k}$$

3) Inversement, il y a un filtre linéaire d'entrée u_n et de sortie x_n de transmittance

$$\begin{aligned}
\beta(z) &= \frac{1}{\alpha(z)} \\
&= \frac{1-\frac{1}{3}z^{-1}}{2\left(1-\frac{1}{6}z^{-1}\right)} \\
&= 1-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{6}z^{-1}}\right) \\
&= 1-\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{6}\right)^k z^{-k} \\
&= \frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{6}\right)^k z^{-k}
\end{aligned}$$

d'où

$$x_n = \frac{1}{2}u_n - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{6}\right)^k u_{n-k}$$

La meilleure prédiction $\widetilde{x}_n$ de x_n sur l'espace H_0 engendré par les $x_m, m \leq 0$ est alors

$$\widetilde{x}_n = -\frac{1}{2}\sum_{k=n}^{\infty}\left(\frac{1}{6}\right)^k u_{n-k}$$

4) L'erreur de prédiction associée est définie par

$$\begin{aligned}
\sigma_n^2 &= \frac{1}{4}\left[1+\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{6}\right)^{2k}\right] \\
&= \frac{1}{4}\frac{1-\left(\frac{1}{36}\right)^n}{1-\frac{1}{36}} \\
&= \frac{9}{35}\left[1-\left(\frac{1}{36}\right)^n\right]
\end{aligned}$$

Puisque

$$x_n = \frac{1}{2}u_n - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{6}\right)^k u_{n-k}$$

la puissance de x_n est

$$\begin{aligned} E\left[x_0^2\right] &= \frac{1}{4}\left[1+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{6}\right)^{2k}\right] \\ &= \frac{1}{4}\frac{1}{1-\frac{1}{36}} \\ &= \frac{9}{35} = P \end{aligned}$$

L'erreur normalisée $\frac{\sigma_n^2}{E\left[x_0^2\right]}$ s'en déduit immédiatement.
5) La loi du vecteur (x_n, x_0) est une loi normale de moyenne nulle et de matrice de covariance

$$\Sigma_n = \begin{pmatrix} P & c_n \\ c_n & P \end{pmatrix}$$

avec $c_n = \text{cov}(x_n, x_0) = E\left[x_n x_0\right]$. On sait que cette expression est paire par rapport à n donc il suffit de la calculer pour $n \geq 0$. On peut utiliser un résultat général sur les lois conditionnelles de vecteurs Gaussiens. Si (Y, Z) est un vecteur Gaussien de moyenne (m_Y, m_Z) et de matrice de covariance

$$\Sigma = \begin{pmatrix} C_Y & D \\ D^T & C_Z \end{pmatrix}$$

alors

$$Z|Y = y \sim \mathcal{N}\left(m_{z|y}, C_{z|y}\right)$$

avec

$$\begin{aligned} m_{z|y} &= m_Z - D^T C_y^{-1}\left(m_Y - Y\right) \\ C_{z|y} &= C_Z - D^T C_Y^{-1} D \end{aligned}$$

qui donne ici

$$x_n|\, x_0 \sim \mathcal{N}\left(\frac{c_n x_0}{P}, P - \frac{c_n^2}{P}\right)$$

d'où

$$\overline{x}_n = E\left[x_n|\, x_0\right] = \frac{c_n x_0}{P} \text{ et } \overline{\sigma}_n^2 = P - \frac{c_n^2}{P}$$

Il suffit alors de calculer la covariance $c_n = E\left[x_n x_0\right]$. En utilisant les définitions

$$\begin{aligned} x_n &= \frac{1}{2}u_n - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{6}\right)^k u_{n-k} \\ x_0 &= \frac{1}{2}u_0 - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{6}\right)^k u_{-k} \end{aligned}$$

il vient

$$
\begin{aligned}
c_n &= \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{6}\right)^n + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{6}\right)^k \left(\frac{1}{6}\right)^{n+k} \\
&= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{6}\right)^n \left[-1 + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{36}\right)^k\right] \\
&= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{6}\right)^n \left[-2 + \frac{1}{1-\frac{1}{36}}\right] \\
&= -\frac{17}{70}\left(\frac{1}{6}\right)^n
\end{aligned}
$$

6) D'après ce qui précède, on a

$$
\begin{aligned}
\frac{X(z)}{E(z)} &= \frac{3 - z^{-1}}{1 - 6z^{-1}} \\
&= \frac{1}{6}\frac{17 + 1 - 6z^{-1}}{1 - 6z^{-1}} \\
&= \frac{1}{6} + \frac{17}{6}\frac{1}{1 - 6z^{-1}} \\
&= \frac{1}{6} - \frac{17}{36}\frac{1}{z^{-1} - \frac{1}{6}} \\
&= \frac{1}{6} - \frac{17}{36}\frac{z}{1 - \frac{1}{6}z}
\end{aligned}
$$

On en déduit, pour $|z| < 6$

$$
\begin{aligned}
\frac{X(z)}{E(z)} &= \frac{1}{6} - \frac{17z}{36}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{6}\right)^k z^k \\
&= \frac{1}{6} - \frac{17}{36}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{6}\right)^k z^{k+1}
\end{aligned}
$$

et finalement

$$
x(n) = \frac{1}{6}e(n) - 17\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{6}\right)^{k+2} e(n+k+1)
$$

Comme la fonction de transfert $H(z)$ admet comme zéro $z = 6$ qui est situé à l'extèrieur du cercle unité, il est normal de trouver une solution anticausale.

7.3 Exercice 3 (examen du 14/11/2001)

Enoncé

Soit $\mathbf{y} = \{y_n, n \in \mathbb{Z}\}$ une suite stationnaire ARMA sur le bruit de densité spectrale de puissance

$$s_y(f) = \frac{1}{|3 + 2e^{-2i\pi f}|^2}$$

La suite $\mathbf{x} = \{x_n, n \in \mathbb{Z}\}$ est définie par

$$x_n = y_n + 2y_{n-1}$$

1) Déterminer la densité spectrale de puissance de x_n.
2) Etudier la décomposition de Wold de la suite $\mathbf{x}$.
3) Déterminer l'équation d'une suite ARMA vérifiée par $\mathbf{x}$.

Solution

1) On a

$$X(z) = Y(z)\left(1 + 2z^{-1}\right)$$

c'est-à-dire

$$H(f) = \frac{X(f)}{Y(f)} = 1 + 2e^{-j2\pi f}$$

En utilisant la relation de Wiener-Lee, on obtient

$$\begin{aligned} s_x(f) &= s_y(f)\,|H(f)|^2 \\ &= \frac{\left|1 + 2e^{-j2\pi f}\right|^2}{|3 + 2e^{-2i\pi f}|^2} \end{aligned}$$

2) La densité spectrale de puissance $s_x(f)$ est celle d'une suite ARMA qui possède le zéro $z = -2$ et le pôle $z = -2/3$. On sait que pour une suite ARMA qui ne possède ni zéro, ni pôle sur le cercle unité, la décomposition de Wold s'écrit

$$x_n = \sum_{s=0}^{\infty} \beta_s u_{n-s}$$

Il suffit alors de déterminer les coefficients β_s pour $s \in \mathbb{N}$. Si $\beta(f)$ est la transmittance du filtre d'entrée u_n et de sortie x_n, on a

$$s_x(f) = |\beta(f)|^2\, s_u(f) = |\beta(f)|^2$$

d'où

$$|\beta(f)|^2 = \frac{\left|1 + 2e^{-j2\pi f}\right|^2}{|3 + 2e^{-2i\pi f}|^2}$$

Comme le zéro associé à $1+2e^{-j2\pi f}=0$ est $z=-2$ qui appartient à l'extèrieur du cercle unité, on utilise la propriété

$$\left|1+2e^{-j2\pi f}\right|^2 = \left|1+2e^{j2\pi f}\right|^2$$

d'où

$$\begin{aligned}
|\beta(f)|^2 &= \frac{\left|1+2e^{j2\pi f}\right|^2}{\left|3e^{j2\pi f}+2\right|^2} \\
&= \frac{4}{9}\frac{\left|1+\frac{1}{2}e^{-j2\pi f}\right|^2}{\left|1+\frac{2}{3}e^{-j2\pi f}\right|^2}
\end{aligned}$$

Pour avoir un filtre causal, il faut nécessairement que $\beta(f)$ ait ses pôles à l'intérieur du cercle unité, i.e.

$$\begin{aligned}
\beta(f) &= \frac{2}{3}\frac{1+\frac{1}{2}e^{-j2\pi f}}{1+\frac{2}{3}e^{-j2\pi f}} \\
&= \frac{1}{6}\left[3+\frac{1}{1+\frac{2}{3}e^{-j2\pi f}}\right]
\end{aligned}$$

En utilisant le développement en série

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{k=0}^{\infty} z^k, \qquad |z|<1$$

on obtient

$$\beta(f) = \frac{1}{6}\left[3+\sum_{k=0}^{\infty}\left(-\frac{2}{3}e^{-j2\pi f}\right)^k\right] = \frac{2}{3}+\frac{1}{6}\sum_{k=1}^{\infty}\left(-\frac{2}{3}\right)^k e^{-jk2\pi f}$$

c'est-à-dire

$$\beta(z) = \frac{2}{3}+\frac{1}{6}\sum_{k=1}^{\infty}\left(-\frac{2}{3}\right)^k z^{-k}$$

et finalement, la décomposition de Wold de x_n s'écrit

$$x_n = \frac{2}{3}u_n + \sum_{k=1}^{\infty}\left(-\frac{2}{3}\right)^k u_{n-k}$$

3) D'après ce qui précède, on a

$$s_x(f) = \frac{\left|1+2e^{-j2\pi f}\right|^2}{\left|3+2e^{-j2\pi f}\right|^2}$$

On veut écrire $s_x(f)$ sous la forme

$$s_x(f) = \left| \frac{B\left(e^{j2\pi f}\right)}{A\left(e^{j2\pi f}\right)} \right|^2$$

Il y a évidemment plusieurs solutions pour B et A. On peut par exemple choisir

$$\frac{B(z)}{A(z)} = \frac{1 + 2z^{-1}}{3 + 2z^{-1}}$$

On en déduit alors que x_n est une suite ARMA sur le bruit blanc $\mathbf{e} = \{e_n, n \in \mathbb{Z}\}$ tel que

$$\frac{X(z)}{E(z)} = \frac{1 + 2z^{-1}}{3 + 2z^{-1}} \Leftrightarrow \left(3 + 2z^{-1}\right) X(z) = \left(1 + 2z^{-1}\right) E(z)$$

L'équation ARMA vérifiée par x_n est donc

$$3x_n + 2x_{n-1} = e_n + 2e_{n-1}$$

On peut aussi choisir un filtre dont les pôles et les zéros sont à l'intérieur du cercle unité, c'està-dire

$$\frac{B(z)}{A(z)} = \frac{2 + z^{-1}}{3 + 2z^{-1}}$$

On en déduit alors que x_n est une suite ARMA sur le bruit blanc $\mathbf{e} = \{e_n, n \in \mathbb{Z}\}$ tel que

$$\frac{X(z)}{E(z)} = \frac{2 + z^{-1}}{3 + 2z^{-1}} \Leftrightarrow \left(3 + 2z^{-1}\right) X(z) = \left(2 + z^{-1}\right) E(z)$$

L'équation ARMA vérifiée par x_n est donc

$$3x_n + 2x_{n-1} = 2e_n + e_{n-1}$$

7.4 Exercice 4 (Examen 21/01/1999)

Enoncé

Soit $\mathbf{x} = \{x_n, n \in \mathbb{Z}\}$ la suite ARMA sur le bruit blanc Gaussien $\mathbf{e} = \{e_n, n \in \mathbb{Z}\}$ (de moyenne nulle et de variance $\sigma_e^2 = 1$) définie par

$$x_n - 9x_{n-2} = 3e_n + 10e_{n-1} + 3e_{n-2}$$

1) Déterminer la densité spectrale de puissance de x_n.

2) Donner l'expression de x_n en fonction des éléments de $\mathbf{e}$.
3) Déterminer la loi de x_n et celle de (x_0, x_n).
4) Déterminer la décomposition de Wold de la suite $\mathbf{x}$. En déduire la meilleure prédiction $\widetilde{x}_n$ de x_n pour $n > 0$ sur l'espace H_0 engendré par les $x_m, m \leq 0$ et l'erreur de prédiction associée

$$\sigma_n^2 = E\left[(x_n - \widetilde{x}_n)^2\right].$$

5) Déterminer la loi de $(\widetilde{x}_n, x_n)$.

Solution

1) On a

$$X(z)\left(1-9z^{-2}\right)=E(z)\left(3+10z^{-1}+3z^{-2}\right)$$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned} H(z) &= \frac{X(z)}{E(z)} \\ &= \frac{3z^2+10z+3}{z^2-9} \\ &= \frac{3(z+3)\left(z+\frac{1}{3}\right)}{(z-3)(z+3)} \\ &= \frac{3z+1}{z-3} \\ &= 3+\frac{10}{z-3} \end{aligned}$$

En utilisant la relation de Wiener-Lee, on obtient

$$\begin{aligned} s_x(f) &= s_e(f)\left|H(f)\right|^2 \\ &= \frac{\left|3e^{j2\pi f}+1\right|^2}{\left|e^{2i\pi f}-3\right|^2} \\ &= \frac{5+3\cos(2\pi f)}{5-3\cos(2\pi f)} \end{aligned}$$

2) On peut décomposer $H(z)$ comme suit

$$\begin{aligned} H(z) &= 3+\frac{10}{z-3} \\ &= 3-\frac{10}{3}\frac{1}{1-\frac{z}{3}} \\ &= 3-\frac{10}{3}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{z}{3}\right)^k \\ &= -\frac{1}{3}-\frac{10}{3}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{z}{3}\right)^k \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} x_n &= -\frac{1}{3}e_n-10\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^{k+1}e_{n+k} \\ &= -\frac{1}{3}e_n-10\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^{k+2}e_{n+k+1} \end{aligned}$$

Comme l'unique pôle de $H(z)$ est à l'extèrieur du cercle unité, x_n s'exprime comme une fonction anti-causale de la suite d'entrée **e**.
1) La loi de x_n est une loi normale de moyenne nulle et de variance

$$\begin{aligned} E\left[x_n^2\right] &= \frac{1}{9}+100\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{9}\right)^{k+1} \\ &= \frac{1}{9}+\left(\frac{10}{9}\right)^2\frac{1}{1-\frac{1}{9}} \\ &= \frac{1}{9}+\frac{100}{9}\frac{1}{8} \\ &= \frac{3}{2} \end{aligned}$$

donc

$$x_n \sim \mathcal{N}\left(0,\frac{3}{2}\right)$$

De même, la loi du vecteur (x_n, x_0) est une loi normale de moyenne $(0,0)$et de matrice de covariance

$$\Sigma_n = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & c_n \\ c_n & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

avec c_n =cov$(x_n, x_0) = E\left[x_n x_0\right]$. On a donc

$$\begin{aligned} c_n &= E\left[x_n x_0\right] \\ &= E\left[\left(-\frac{1}{3}e_n - 10\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^{k+1} e_{n+k}\right)\left(-\frac{1}{3}e_0 - 10\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^{k+1} e_k\right)\right] \\ &= -\frac{1}{3}\left(\frac{-10}{3^{n+1}}\right)+100\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^{k+1}\left(\frac{1}{3}\right)^{n+k+1} \\ &= \frac{10}{3^{n+2}}+\frac{100}{3^{n+2}}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{9}}-1\right) \\ &= \frac{5}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n \end{aligned}$$

4) On sait que pour une suite ARMA qui ne possède ni zéro, ni pôle sur le cercle unité, la décomposition de Wold s'écrit

$$x_n = \sum_{s=0}^{\infty}\beta_s u_{n-s}$$

Il suffit alors de déterminer les coefficients β_s pour $s \in \mathbb{N}$. Si $\beta(f)$ est la transmittance du filtre d'entrée u_n et de sortie x_n, on a

$$s_x(f) = |\beta(f)|^2 \, s_u(f) = |\beta(f)|^2$$

d'où

$$\begin{aligned}
|\beta(f)|^2 &= \frac{\left|3e^{j2\pi f} + 1\right|^2}{\left|e^{2i\pi f} - 3\right|^2} \\
&= \frac{9\left|1 + \frac{1}{3}e^{-j2\pi f}\right|^2}{9\left|1 - \frac{1}{3}e^{2i\pi f}\right|^2} \\
&= \frac{\left|1 + \frac{1}{3}e^{-j2\pi f}\right|^2}{\left|1 - \frac{1}{3}e^{-2i\pi f}\right|^2}
\end{aligned}$$

On sait que $\beta(f)$ doit avoir ses zéros et ses pôles à l'intérieur du cercle unité, i.e.

$$\begin{aligned}
\beta(f) &= \frac{1 + \frac{1}{3}e^{-j2\pi f}}{1 - \frac{1}{3}e^{-2i\pi f}} \\
&= -1 + 2\frac{1}{1 - \frac{1}{3}e^{-j2\pi f}}
\end{aligned}$$

On en déduit

$$\beta(z) = -1 + 2\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^k z^{-k}$$

d'où

$$\begin{aligned}
x_n &= -u_n + 2\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^k u_{n-k} \\
&= u_n + 2\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^k u_{n-k}
\end{aligned}$$

La la meilleure prédiction $\widetilde{x}_n$ de x_n pour $n > 0$ sur l'espace H_0 engendré par les $x_m, m \leq 0$ est

$$\widetilde{x}_n = 2\sum_{k=n}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^k u_{n-k}$$

et l'erreur de prédiction associée

$$\begin{aligned}
\sigma_n^2 &= E\left[(x_n - \widetilde{x}_n)^2\right] \\
&= E\left[\left(u_n + 2\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{3}\right)^k u_{n-k}\right)^2\right] \\
&= 1 + 4\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{9}\right)^k \\
&= \frac{3}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{9}\right)^{n-1}
\end{aligned}$$

5) Le vecteur $(\widetilde{x}_n, x_n)$ est obtenu par transformation affine des éléments de la suite **e**. Donc il est gaussien de moyenne $(0,0)$ et de matrice de covariance

$$C_n = \begin{pmatrix} E\left[\widetilde{x}_n^2\right] & E\left[\widetilde{x}_n x_n\right] \\ E\left[\widetilde{x}_n x_n\right] & E\left[x_n^2\right] \end{pmatrix}$$

On a déjà déterminé $E\left[x_n^2\right] = \frac{3}{2}$. On a

$$\begin{aligned}
E\left[\widetilde{x}_n^2\right] &= 4E\left[\left(\sum_{k=n}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^k u_{n-k}\right)^2\right] \\
&= 4\sum_{k=n}^{\infty}\left(\frac{1}{9}\right)^k \\
&= \frac{4}{9^n}\frac{1}{1-\frac{1}{9}} \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{9}\right)^{n-1}
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
E\left[\widetilde{x}_n x_n\right] &= E\left[\widetilde{x}_n\left[\widetilde{x}_n + (x_n - \widetilde{x}_n)\right]\right] \\
&= E\left[\widetilde{x}_n^2\right] \text{ (car } x_n - \widetilde{x}_n \text{ est orthogonal à } \widetilde{x}_n) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{9}\right)^{n-1}
\end{aligned}$$

Bibliography

[1] Peter J. Brockwell and Richard A. Davis, *Time Series: Theory and Methods*, Springer Verlag, 2nd edition, 1998.

[2] B. Porat, *Digital Processing of Random Signal. Theory and Methods,* Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1994.