Processus Stochastiques

Mercredi 7 Janvier 2009, 14h00-16h00

$1^{ère}$ Partie : Chaîne de Markov

On considère une suite de variables aléatoires indépendantes $\{V_j, j \geq 1\}$ de même loi de Bernoulli

$$\begin{cases} P[V_j = 1] = p \in]0, 1[\\ P[V_j = 0] = q = 1 - p \end{cases}$$

et on suppose $V_{-1} = V_0 = 0$. On définit alors le vecteur X_n comme suit

$$X_n = (V_n, V_{n-1})^T.$$

1) Montrer que X_n est une chaîne de Markov homogène sur l'ensemble des états $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ avec

$$e_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } e_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Préciser la matrice de transition $\mathbf{P}$ de cette chaîne de Markov.
2) Déterminer l'unique chaîne stationnaire $\pi = (\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4)$ associée à la matrice $\mathbf{P}$.
3) Calculer $\mathbf{P}^n$ et montrer par récurrence que

$$\mathbf{P}^n = \begin{pmatrix} \pi \\ \pi \\ \pi \\ \pi \end{pmatrix}, \qquad \forall n \geq 2.$$

En déduire

$$\lim_{n \to \infty} \mathbf{P}^n$$

Aurait-on pu obtenir ce résultat plus directement ?
4) Déterminer la loi de X_n pour $n \geq 2$.
5) On suppose $p = \frac{1}{4}$. Donner le meilleur majorant de $\|\mathbf{P}^n - \mathbf{P}^\infty\|$ issu de l'application du théorème du cours.

$2^{ème}$ Partie : Chaîne de Markov

On considère une chaîne de Markov x_n à quatre états e_1, e_2, e_3 et e_4 de matrice de transition

$$Q = \begin{pmatrix} I & 0^T \\ C & D \end{pmatrix}, \text{ avec } I = 1,\ 0^T = (0,0,0),\ C = \left(\frac{1}{2}, 0, 0\right)^T \text{ et } D = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

et on suppose que la probabilité d'occupation des états à l'instant $n = 0$ est $q(0) = [0,0,0,1]$.
1) Montrer que la loi du temps d'absorption dans l'état e_1 noté T est vérifie

$$P\left[T = n\right] = \frac{1}{2} P\left[x_{n-1} = e_2\right], \qquad \forall n \geq 1$$

2) Déterminer les valeurs propres de D et en déduire une expression de $P\left[T = n\right]$ en fonction des puissances $(n-1)^{ème}$ de ces valeurs propres et de constantes que l'on déterminera.
3) Montrer par récurrence que pour tout $n \geq 1$, on a

$$D^n = \left(\frac{1}{2}\right)^n \begin{pmatrix} a_n & b_n & a_n \\ a_n + b_n & a_n & a_n + b_n \\ a_n + b_n & a_n & a_n + b_n \end{pmatrix}$$

où a_n et b_n vérifient les relations

$$a_{n+1} = a_n + b_n \text{ et } b_{n+1} = a_n$$

4) En déduire la loi du temps d'absorption en fonction de a_{n-1} et a_{n-2}.

$3^{ème}$ Partie : Suite stationnaire

On considère une suite AR notée $\{x_t, t \in \mathbb{Z}\}$ définie par l'équation récurrente

$$x_t - \frac{7}{2} x_{t-1} + \frac{3}{2} x_{t-2} = e_t,$$

où $\{e_t, t \in \mathbb{Z}\}$ est un bruit blanc de moyenne nulle et de variance $\sigma_e^2 = E\left[e_t^2\right] = 1$.
1) Déterminer la densité spectrale de puissance de x_t.
2) Exprimer x_t en fonction de la suite d'entrée $\{e_t, t \in \mathbb{Z}\}$.
3) Déterminer l'innovation u_t en fonction de x_t.
4) Quelle est la décomposition de Wold de la suite x_t ?