Processus Stochastiques

Jeudi 14 Janvier 2009, 14h00-16h00

$1^{ère}$ Partie : Chaîne de Markov

On considère une chaîne de Markov à deux états 0 et 1 dont la matrice de transition est définie par

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1-a & a \\ b & 1-b \end{pmatrix}$$

où a et b appartiennent tous deux à l'intervalle $]0,1[$.
1) Etudier les lois stationnaires et limites de cette chaîne de Markov.
2) Montrer que

$$\mathbf{P}^n = \frac{1}{a+b} \begin{pmatrix} b + a(1-a-b)^n & a - a(1-a-b)^n \\ b - b(1-a-b)^n & a + b(1-a-b)^n \end{pmatrix}$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$. En notant $\mathbf{q}(n) = (P[x_n = 0], P[x_n = 1])$ où x_n est l'état de la chaîne de Markov à l'instant n, en déduire

$$\lim_{n \to \infty} \mathbf{q}(n)$$

et retrouver la loi limite obtenue à la question précédente.
3) On suppose $a = \frac{1}{2}$ et $b = \frac{1}{3}$. Donner le meilleur majorant de $\|\mathbf{P}^n - \mathbf{P}^\infty\|$.
4) On suppose désormais que $a = b = 1$. Déterminer la loi de x_n pour tout $n \in \mathbb{N}$ en fonction de $\mathbf{q}(0) = (u, 1-u)$ avec $u \neq \frac{1}{2}$.
5) On suppose $a = 0, b \in]0,1[$ et $\mathbf{q}(0) = (0,1)$. Déterminer la loi du temps d'absorption T ainsi que sa moyenne et sa variance.

$2^{ème}$ Partie : Suite stationnaire

On considère le système d'équations récurrentes

$$\begin{aligned} y_t &= b y_{t-1} + a x_t + \varepsilon_t, \qquad t \in \mathbb{Z} \\ x_t &= c x_{t-1} + e_t, \qquad t \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

où $\{\varepsilon_t, t \in \mathbb{Z}\}$ et $\{e_t, t \in \mathbb{Z}\}$ sont des bruits blancs (de moyennes nulles) indépendants de variance respectives σ_ε^2 et σ_e^2.
1) Montrer que la suite $\{\omega_t, t \in \mathbb{Z}\}$ définie par

$$\omega_t = a e_t + \varepsilon_t - c\varepsilon_{t-1}, \qquad t \in \mathbb{Z}$$

est une suite stationnaire. Déterminer les autocorrélations $r_\omega(h) = E[\omega_t \omega_{t+h}]$ de cette suite (pour tout $h \in \mathbb{Z}$).

2) On cherche à écrire ω_t sous la forme d'une suite MA(1) dont l'entrée u_t est un bruit blanc (de moyenne nulle) de variance σ_u^2 telle que

$$\omega_t = u_t - \theta u_{t-1}, \qquad t \in \mathbb{Z}$$

Montrer que θ vérifie une équation du second degré dont les coefficients dépendent de $a, c, \sigma_\varepsilon^2$ et σ_e^2.
3) Déduire des questions précédentes que y_t est une suite ARMA(2,1) d'entrée u_t dont on déterminera la fonction de transfert. Montrer que l'équation de récurrence de cette suite est

$$y_t - (b+c)\, y_{t-1} + bc y_{t-2} = u_t - \theta u_{t-1}, \qquad t \in \mathbb{Z}$$

4) Déterminer la densité spectrale de puissance de la suite y_t.
5) On suppose $b < 1, \theta < 1$ et $c > 1$. Déterminer l'innovation de la suite y_t notée i_t et sa décomposition de Wold.
6) Déterminer la meilleure prédiction linéaire de y_t notée $\widehat{y_t}$ sur l'espace engendré par son passé $y_{t-1}, y_{t-2}, ...$ et l'erreur d'approximation

$$\sigma^2 = E\left[|\widehat{y_t} - y_t|^2\right]$$

Quelle est la loi de $(y_t, \widehat{y_t})$?