Processus Stochastiques

Jeudi 6 Janvier 2011, 16h00-18h00

$1^{ère}$ Partie : Chaîne de Markov

On considère une chaîne de Markov à trois états $0, 1$ et 2 dont la matrice de transition est définie par

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ p & q & 0 \end{pmatrix}$$

où p et $q = 1 - p$ appartiennent tous deux à l'intervalle $]0, 1[$.
1) Etudier les lois stationnaires de cette chaîne de Markov .
2) En appliquant le théorème du cours, montrer que cette chaîne de Markov admet une unique loi limite que l'on déterminera.
3) On suppose $p = \frac{1}{4}$. Déterminer

$$\mathbf{P}^{\infty} = \lim_{n \to \infty} \mathbf{P}^n$$

et déterminer une valeur de n pour laquelle $\|\mathbf{P}^n - \mathbf{P}^{\infty}\| \leq 10^{-2}$.
4) D'après un théorème du cours, si $\lambda = 1$ est une valeur propre simple de $\mathbf{P}$ et si toutes les autres valeurs propres de $\mathbf{P}$ sont de module strictement inférieur à 1, alors l'existence et l'unicité d'une distribution limité est assurée. Peut-on appliquer ce théorème pour $p = \frac{1}{4}$?
5) On suppose désormais que $p = 1$ (et donc $q = 0$), i.e., que la matrice $\mathbf{P}$ s'écrit

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Montrer que la matrice $\mathbf{P}^n$ ne converge pas.
6) Plus généralement, on considère une chaîne de Markov à m états de matrice de transition

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \\ p & q & 0 & \ldots & \ldots & 0 \end{pmatrix}$$

où p et $q = 1 - p$ appartiennent tous deux à l'intervalle $]0, 1[$.Etudier les lois stationnaires de la matrice $\mathbf{Q}$. Que faudrait-il faire pour montrer que cette chaîne de Markov admet une unique loi limite ?

$2^{ème}$ Partie : Suite stationnaire

On considère la suite stationnaire AR définie par l'équation récurrente

$$y_t = c + \frac{7}{12} y_{t-1} - \frac{1}{12} y_{t-2} + e_t, \qquad t \in \mathbb{Z}$$

où $\{e_t, t \in \mathbb{Z}\}$ est un bruit blanc (de moyenne nulle) $\sigma_e^2 = 2$.
1) Montrer qu'il existe une constante m que l'on déterminera en fonction de c telle que la suite $\{x_t = y_t - m, t \in \mathbb{Z}\}$ vérifie l'équation récurrente

$$x_t = \frac{7}{12} x_{t-1} - \frac{1}{12} x_{t-2} + e_t, \qquad t \in \mathbb{Z}$$

2) Montrer que la suite $\{x_t, t \in \mathbb{Z}\}$ peut être obtenue par un filtrage de la suite d'entrée $\{e_t, t \in \mathbb{Z}\}$ et que la relation reliant x_t et e_t est causale.
3) Déterminer l'innovation de la suite x_t notée u_t (en fonction des éléments de la suite $\{x_t, t \in \mathbb{Z}\}$ puis en fonction de e_t) et la décomposition de Wold de x_t. En déduire une expression de y_t en fonction des éléments du bruit d'entrée $\{e_t, t \in \mathbb{Z}\}$.
4) Déterminer la meilleure prédiction linéaire de x_{t+k} notée $\widehat{x}_{t+k}$ sur l'espace engendré par son passé $x_t, x_{t-1}, ...$ et l'erreur d'approximation

$$\sigma_k^2 = E\left[\left| \widehat{x}_{t+k} - x_{t+k} \right|^2 \right]$$

En déduire la meilleure prédiction linéaire de y_{t+k} notée $\widehat{y}_{t+k}$ sur l'espace engendré par son passé $y_t, y_{t-1}, ...$ et l'erreur d'approximation

$$E\left[\left| \widehat{y}_{t+k} - y_{t+k} \right|^2 \right]$$

$3^{ème}$ Partie : Méthodes de Simulation

On considère n observations $x_1, ..., x_n$ générées à partir d'une loi gamma de densité

$$f(x_i | a, b) = \frac{b^a}{\Gamma(a)} x_i^{a-1} \exp(-b x_i) \mathbb{I}_{\mathbb{R}^+}(x_i)$$

où $\mathbb{I}_{\mathbb{R}^+}(.)$ est la fonction indicatrice sur $\mathbb{R}^+$ telle que $\mathbb{I}_{\mathbb{R}^+}(x) = 1$ si $x > 0$ et $\mathbb{I}_{\mathbb{R}^+}(x) = 0$ sinon. L'objectif de cet exercice est de proposer une méthode de simulation permettant d'estimer les paramètres a et b à partir des observations $(x_1, ..., x_n)$. On suppose que les paramètres a et b sont munis de lois a priori indépendantes définies comme suit

$$\begin{aligned} f(a) &= \mathbb{I}_{[0,1]}(a) \ \text{(loi uniforme sur l'intervalle } [a,b]) \\ f(b|\alpha,\beta) &= \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} b^{\alpha-1} \exp(-\beta b) \mathbb{I}_{\mathbb{R}^+}(b) \ \text{(loi gamma de paramètres } \alpha \text{ et } \beta) \end{aligned}$$

On supposera dans cet exercice que les hyperparamètres α et β sont connus.
1) Déterminer la vraisemblance associée à ce problème puis la forme de la loi a posteriori du vecteur paramètre $\boldsymbol{\theta} = (a, b)$ notée $f(\boldsymbol{\theta} | x_1, ..., x_n)$ (à un facteur multiplicatif près).
2) Déterminer les lois conditionnelles $f(a | b, x_1, ..., x_n)$ et $f(b | a, x_1, ..., x_n)$. Montrer que la loi conditionnelle de $b | a, x_1, ..., x_n$ est une loi gamma dont on précisera les paramètres.
3) Rappeler le principe de l'échantillonneur de Gibbs permettant de générer des vecteurs distribués suivant la loi a posteriori $f(\boldsymbol{\theta} | x_1, ..., x_n)$. Puisqu'il n'est pas simple de simuler suivant la loi conditionnelle de $f(a | b, x_1, ..., x_n)$, on décide d'utiliser une étape de Metropolis-Hastings pour cette simulation avec une loi de proposition uniforme sur l'intervalle $[0, 1]$. Expliquer le principe de cette étape de Metropolis-Hastings et indiquer en particulier la forme du rapport d'acceptation-rejet.
4) Après avoir simulé K vecteurs notés $\boldsymbol{\theta}^{(k)}, k = 1, ..., K$ distribués suivant $f(\boldsymbol{\theta} | x_1, ..., x_n)$, expliquer comment on peut estimer les paramètres a et b. Qu'est ce que la période de chauffage (burn-in) de l'échantillonneur de Gibbs ?