Examen de Processus Stochastiques
Mercredi 7 Janvier 2009

$1^{ère}$ Partie : Chaîne de Markov

On considère une suite de variables aléatoires indépendantes $\{V_j, j \geq 1\}$ de même loi de Bernoulli

$$\begin{cases} P\left[V_j = 1\right] = p \in \left]0, 1\right[\\ P\left[V_j = 0\right] = q = 1 - p \end{cases}$$

et on suppose $V_{-1} = V_0 = 0$. On définit alors le vecteur X_n comme suit

$$X_n = \left(V_n, V_{n-1}\right)^T.$$

1) Il est clair que le vecteur X_n est à valeurs dans l'ensemble des états $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ avec

$$e_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } e_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Pour montrer que X_n définit une chaîne de Markov, il suffit de montrer que la loi de $X_n | X_{n-1}, X_{n-2}, ...$ est indépendante de $X_{n-2}, X_{n-3}, ...$, c'est-à-dire ne dépend que de X_{n-1}. Puisque

$$X_n = \begin{pmatrix} V_n \\ V_{n-1} \end{pmatrix}, X_{n-1} = \begin{pmatrix} V_{n-1} \\ V_{n-2} \end{pmatrix}, X_{n-2} = \begin{pmatrix} V_{n-2} \\ V_{n-3} \end{pmatrix}, ...$$

et que les variables aléatoires $V_j, j \in \mathbb{N}$ sont indépendantes, il est clair que X_n dépend de X_{n-1} via V_{n-1} mais est indépendant de $X_{n-2}, X_{n-3}, ...$

De plus

$$\begin{aligned}
P\left[X_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \middle| X_{n-1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right] &= P\left[V_n = 0\right] = q, \\
P\left[X_n = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \middle| X_{n-1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right] &= P\left[V_n = 1\right] = p, \\
P\left[X_n = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| X_{n-1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right] &= 0, \\
P\left[X_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| X_{n-1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right] &= 0.
\end{aligned}$$

On opère de la même façon pour les autres probabilités conditionnelles et on obtient la matrice de transition $\mathbf{P}$ de cette chaîne de Markov

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} q & 0 & p & 0 \\ q & 0 & p & 0 \\ 0 & q & 0 & p \\ 0 & q & 0 & p \end{pmatrix}$$

2) Les chaînes stationnaires $\pi = (\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4)$ associées à la matrice $\mathbf{P}$ vérifient

$$\left\{\begin{array}{c} \pi = \pi\mathbf{P} \\ \sum_{k=1}^{4} \pi_k = 1 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{c} \pi_1 = q\pi_1 + q\pi_2 \\ \pi_2 = q\pi_3 + q\pi_4 \\ \pi_3 = p\pi_1 + p\pi_2 \\ \pi_4 = p\pi_3 + p\pi_4 \\ \sum_{k=1}^{4} \pi_k = 1 \end{array}\right.$$

On en déduit

$$\left\{\begin{array}{c} p\pi_1 = q\pi_2 \\ q\pi_4 = p\pi_3 \\ \pi_3 = q\pi_2 + p\pi_2 = \pi_2 \\ \sum_{k=1}^{4} \pi_k = 1 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{c} p\pi_1 = q\pi_2 \\ q\pi_4 = p\pi_3 \\ \pi_3 = q\pi_2 + p\pi_2 = \pi_2 \\ \frac{q}{p}\pi_2 + \pi_2 + \pi_2 + \frac{p}{q}\pi_2 = 1 \end{array}\right.$$

d'où

$$1 = \pi_2 \left(\frac{q^2 + 2pq + p^2}{pq} \right) = \pi_2 \frac{(p+q)^2}{pq} = \frac{\pi_2}{pq}$$

Finalement, on obtient une seule solution stationnaire

$$\pi_1 = q^2, \pi_2 = pq, \pi_3 = pq, \pi_4 = p^2$$

3) Un calcul élémentaire donne

$$\mathbf{P}^2 = \begin{pmatrix} q^2 & pq & pq & p^2 \\ q^2 & pq & pq & p^2 \\ q^2 & pq & pq & p^2 \\ q^2 & pq & pq & p^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pi \\ \pi \\ \pi \\ \pi \end{pmatrix}$$

Supposons que

$$\mathbf{P}^n = \begin{pmatrix} \pi \\ \pi \\ \pi \\ \pi \end{pmatrix}.$$

Alors

$$\begin{aligned} \mathbf{P}^{n+1} &= \mathbf{P}\mathbf{P}^n \\ &= \begin{pmatrix} q & 0 & p & 0 \\ q & 0 & p & 0 \\ 0 & q & 0 & p \\ 0 & q & 0 & p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \pi \\ \pi \\ \pi \\ \pi \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \pi \\ \pi \\ \pi \\ \pi \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Donc, pour tout $n \geq 2$, on a

$$\mathbf{P}^n = \begin{pmatrix} \pi \\ \pi \\ \pi \\ \pi \end{pmatrix}$$

Comme chaque colonne de $\mathbf{P}^2$ a un minimum strictement positif, on peut appliquer le théorème du cours. Ce théorème dit en particulier que

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}^n = \begin{pmatrix} \pi \\ \pi \\ \pi \\ \pi \end{pmatrix}$$

où π est l'unique distribution stationnaire de la chaîne de Markov.
4) On pose

$$\mathbf{q}(n) = \mathbf{q}(0)\mathbf{P}^n$$

avec

$$\begin{aligned} \mathbf{q}(0) &= \left[P\left[X_0 = (0,0)^T\right], P\left[X_0 = (0,1)^T\right], P\left[X_0 = (1,0)^T\right], P\left[X_0 = (1,01^T\right]\right], \\ &= [1,0,0,0]. \end{aligned}$$

Le vecteur $\mathbf{q}(n)$ est donc la première ligne de $\mathbf{P}^n$. Pour $n = 1$, on obtient

$$\mathbf{q}(1) = [q, 0, p, 0],$$

tandis que pour $n \geq 2$

$$\mathbf{q}(n) = \left[q^2, pq, pq, p^2\right]$$

5) On applique le théorème mais comme pour $n_0 = 1$, toutes les colonnes possèdent au moins un 0, on travaille avec $n_0 = 2$. Pour $p = \frac{1}{4}$ et $q = \frac{3}{4}$, on a

$$P^2 = \begin{pmatrix} \frac{9}{16} & \frac{3}{16} & \frac{3}{16} & \frac{1}{16} \\ \frac{9}{16} & \frac{3}{16} & \frac{3}{16} & \frac{1}{16} \\ \frac{9}{16} & \frac{3}{16} & \frac{3}{16} & \frac{1}{16} \\ \frac{9}{16} & \frac{3}{16} & \frac{3}{16} & \frac{1}{16} \end{pmatrix}$$

On voit donc que les hypothèses du théorème sont vérifiées avec

$$\begin{aligned} \delta &= \frac{9}{16} \text{ pour la colonne 1, i.e. } s = 1 \\ \delta &= \frac{3}{16} \text{ pour les colonnes } 1, 2 \text{ et } 3\text{, i.e. } s = 3 \\ \delta &= \frac{1}{16} \text{ pour les colonnes } 1, 2, 3 \text{ et } 4\text{, i.e. } s = 4 \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} \|\mathbf{P}^n - \mathbf{P}^\infty\| &\leq \left(1 - \frac{9}{16}\right)^{\frac{n}{2}-1} = \left(\frac{7}{16}\right)^{\frac{n}{2}-1} \\ \|\mathbf{P}^n - \mathbf{P}^\infty\| &\leq \left(1 - \frac{9}{16}\right)^{\frac{n}{2}-1} = \left(\frac{7}{16}\right)^{\frac{n}{2}-1} \\ &\text{et} \\ \|\mathbf{P}^n - \mathbf{P}^\infty\| &\leq \left(1 - \frac{4}{16}\right)^{\frac{n}{2}-1} = \left(\frac{12}{16}\right)^{\frac{n}{2}-1} \end{aligned}$$

La première inégalité va conduire à la plus petite valeur de n définie par

$$\begin{aligned}
\left(\frac{7}{16}\right)^{\frac{n}{2}-1} &\leq 10^{-2} \Leftrightarrow \left(\frac{7}{16}\right)^{\frac{n}{2}} \leq \frac{7}{16}10^{-2} \\
&\Leftrightarrow \frac{n}{2}\log_{10}\left(\frac{7}{16}\right) \leq \log_{10}\left(\frac{7}{16}\right) - 2 \\
&\Leftrightarrow n \geq 2 - \frac{4}{\log_{10}\left(\frac{7}{16}\right)} \simeq 13.14
\end{aligned}$$

d'où

$$n \geq 14.$$

$\boxed{\mathbf{2^{\grave{e}me}}\ \textbf{Partie : Chaîne de Markov}}$

1) La matrice de transition de la chaîne de Markov est

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

la chaîne possède un unique état absorbant qui est le premier état e_1. Le temps d'absorption est tel que

$$\begin{aligned}
P\left[T=n\right] &= P\left[x_n = e_1, x_{n-1} \neq e_1\right] \\
&= P\left[x_n = e_1, x_{n-1} = e_2\right] + P\left[x_n = e_1, x_{n-1} = e_3\right] + P\left[x_n = e_1, x_{n-1} = e4\right] \\
&= P\left[x_n = e_1 \left| x_{n-1} = e_2\right.\right] P\left[x_{n-1} = e_2\right] + P\left[x_n = e_1 \left| x_{n-1} = e_3\right.\right] P\left[x_{n-1} = e_3\right] \\
&\quad + P\left[x_n = e_1 \left| x_{n-1} = e_4\right.\right] P\left[x_{n-1} = e_4\right] \\
&= \frac{1}{2} P\left[x_{n-1} = e_2\right]
\end{aligned}$$

car les probabilités de transition $P\left[x_n = e_1 \left| x_{n-1} = e_3\right.\right]$ et $P\left[x_n = e_1 \left| x_{n-1} = e_4\right.\right]$ sont nulles.
2) Les valeurs propres de D vérifient

$$\begin{aligned}
|D - \lambda I| &= 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} -\lambda & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & -\lambda & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \\
&\Leftrightarrow -\lambda\left(\lambda^2 - \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4} - \frac{\lambda}{2} - \frac{1}{4}\right) = 0 \\
&\Leftrightarrow -\frac{\lambda}{4}\left(4\lambda^2 - 2\lambda - 1\right) = 0 \\
&\Leftrightarrow -\frac{\lambda}{4}\left(\lambda - \frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)\left(\lambda - \frac{1-\sqrt{5}}{4}\right) = 0
\end{aligned}$$

Il est classique de décomposer la matrice P sous la forme d'une matrice par blocs telle que

$$Q = \begin{pmatrix} I & 0 \\ C & D \end{pmatrix}$$

avec ici

$$I=(1), C=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, D=\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Des calculs élémentaires permettent d'obtenir par récurrence

$$Q^n=\begin{pmatrix} I & 0 \\ (I+D+...+D^{n-1})\, C & D^n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} I & 0 \\ (I-D^n)\,(I-D)^{-1}\, C & D^n \end{pmatrix}$$

On en déduit

$$D^n=P\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^n & 0 \\ 0 & 0 & \left(\frac{1-\sqrt{5}}{4}\right)^n \end{pmatrix}P^T=M\left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^n+N\left(\frac{1-\sqrt{5}}{4}\right)^n$$

Mais $q(0)=(0,0,0,1)$ donc

$$\begin{aligned} q(n-1) &= q(0)P^{n-1} \\ &= (0,0,0,1)\begin{pmatrix} I & 0 \\ (I-D^{n-1})\,(I-D)^{-1}\, C & D^{n-1} \end{pmatrix} \\ &= (P\left[x_{n-1}=e_1\right], P\left[x_{n-1}=e_2\right], P\left[x_{n-1}=e_3\right], P\left[x_{n-1}=e_4\right]) \end{aligned}$$

La probabilité recherchée $P\left[x_{n-1}=e_2\right]$ est sur la dernière ligne de D^{n-1}. Cette probabilité est donc de la forme

$$P\left[x_{n-1}=e_2\right]=a_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^{n-1}+b_1\left(\frac{1-\sqrt{5}}{4}\right)^{n-1}.$$

d'où

$$\begin{aligned} P\left[T=n\right] &= \frac{1}{2}P\left[x_{n-1}=e_2\right] \\ &= c_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^{n-1}+d_1\left(\frac{1-\sqrt{5}}{4}\right)^{n-1} \end{aligned}$$

Il faut maintenant calculer les constantes c_1 et d_1. On détermine ces constantes à partir de valeurs particulières de n

$$\begin{aligned} P\left[T=1\right] &= \frac{1}{2}P\left[x_0=e_2\right]=0 \\ P\left[T=2\right] &= \frac{1}{2}P\left[x_1=e_2\right] \end{aligned}$$

Mais $q(1)=q(0)Q$, donc

$$\begin{aligned} q(1) &= [0,0,0,1]\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \\ &= \left[0,\frac{1}{2},0,\frac{1}{2}\right], \end{aligned}$$

d'où

$$P\left[x_1 = e_2\right] = \frac{1}{2}$$

On en conclut que les constantes c_1 et c_2 vérifient le système d'équations

$$\begin{aligned} c_1 + d_1 &= 0 \\ c_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right) + d_1\left(\frac{1-\sqrt{5}}{4}\right) &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

dont la solution est

$$c_1 = \frac{1}{2\sqrt{5}} \text{ et } d_1 = -\frac{1}{2\sqrt{5}}$$

Finalement, la loi du temps d'absorption est

$$P\left[T = n\right] = \frac{1}{2\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^{n-1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{4}\right)^{n-1}\right]$$

3) Pour $n = 1$, on a

$$D = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

qui vérifie bien la relation de récurrence avec

$$a_1 = 0 \text{ et } b_1 = 1$$

Supposons alors que

$$D^n = \left(\frac{1}{2}\right)^n \begin{pmatrix} a_n & b_n & a_n \\ a_n + b_n & a_n & a_n + b_n \\ a_n + b_n & a_n & a_n + b_n \end{pmatrix}$$

On en déduit

$$\begin{aligned} D^{n+1} &= D^n D \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^n \begin{pmatrix} a_n & b_n & a_n \\ a_n + b_n & a_n & a_n + b_n \\ a_n + b_n & a_n & a_n + b_n \end{pmatrix} \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \begin{pmatrix} a_n + b_n & a_n & a_n + b_n \\ 2a_n + b_n & a_n + b_n & 2a_n + b_n \\ 2a_n + b_n & a_n + b_n & 2a_n + b_n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

En posant

$$a_{n+1} = a_n + b_n \text{ et } b_{n+1} = a_n,$$

on obtient

$$D^{n+1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \begin{pmatrix} a_{n+1} & b_{n+1} & a_{n+1} \\ a_{n+1} + b_{n+1} & a_{n+1} & a_{n+1} + b_{n+1} \\ a_{n+1} + b_{n+1} & a_{n+1} & a_{n+1} + b_{n+1} \end{pmatrix},$$

ce qui termine la preuve par récurrence.
4) La loi du temps d'absorption est définie par

$$P[T=n] = \frac{1}{2} P[x_{n-1} = e_2].$$

Mais

$$\begin{aligned} q(n-1) &= (P[x_{n-1} = e_1], P[x_{n-1} = e_2], P[x_{n-1} = e_3], P[x_{n-1} = e_4]), \\ &= (0,0,0,1) \begin{pmatrix} I & 0 \\ (I - D^{n-1})(I-D)^{-1} C & D^{n-1} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Donc $P[x_{n-1} = e_2]$ est le premier élément de la dernière ligne de D^{n-1}, d'où

$$\begin{aligned} P[T=n] &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} (a_{n-1} + b_{n-1}), \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^{n} (a_{n-1} + b_{n-1}). \end{aligned}$$

En utilisant la relation $b_{n-1} = a_{n-2}$, on en déduit

$$P[T=n] = \left(\frac{1}{2}\right)^{n} (a_{n-1} + a_{n-2}).$$

$3^{\text{ème}}$ Partie : Suite stationnaire

1) En prenant la transformée en Z de l'équation

$$x_t - \frac{7}{2} x_{t-1} + \frac{3}{2} x_{t-2} = e_t,$$

on obtient

$$X(z)\left(1 - \frac{7}{2} z^{-1} + \frac{3}{2} z^{-2}\right) = E(z),$$

d'où

$$H(z) = \frac{X(z)}{E(z)} = \frac{2z^2}{2z^2 - 7z + 3}$$

La relation de Wiener-Lee permet d'obtenir

$$s_x(f) = s_e(f) |H(f)|^2.$$

La fraction rationnelle $H(z)$ Cette fraction rationnelle admet deux pôles réels $z = 3$ et $z = \frac{1}{2}$

$$H(z) = \frac{2z^2}{(z-3)(2z-1)},$$

d'où

$$\begin{aligned} s_x(f) &= \frac{4}{\left|e^{j2\pi f}-3\right|^2\left|2e^{j2\pi f}-1\right|^2}, \\ &= \frac{4}{\left[10-6\cos\left(2\pi f\right)\right]\left[5-4\cos\left(2\pi f\right)\right]}, \\ &= \frac{2}{\left[5-3\cos\left(2\pi f\right)\right]\left[5-4\cos\left(2\pi f\right)\right]} \end{aligned}$$

2) La fraction rationnelle $H(z)$ admet deux pôles réels $z=3$ et $z=\frac{1}{2}$ situés respectivement à l'extérieur et à l'intérieur du cercle unité. On sait donc que la sortie du filtre AR x_t s'exprime sous la forme

$$x_t = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_k e_{t-k}.$$

Mais

$$\begin{aligned} H(z) &= \frac{2z^2}{\left(z-3\right)\left(2z-1\right)}, \\ &= 1+\frac{7z-3}{\left(z-3\right)\left(2z-1\right)}, \\ &= 1+\frac{A}{2z-1}+\frac{B}{z-3}. \end{aligned}$$

Des calculs élémentaires permettent de déterminer A et B

$$A = -\frac{1}{5} \text{ et } B = \frac{18}{5}$$

On en déduit

$$H(z) = 1-\frac{1}{10z}\frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}+\frac{18}{5\left(-3\right)}\frac{1}{1-\frac{z}{3}}$$

Pour $z=e^{j2\pi f}$, on a

$$\left|\frac{1}{2}z^{-1}\right| = \frac{1}{2} < 1 \text{ et } \left|\frac{z}{3}\right| = \frac{1}{3} < 1,$$

ce qui permet d'écrire

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} &= \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^k z^{-k} \\ \frac{1}{1-\frac{z}{3}} &= \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^k z^{k} \end{aligned}$$

On a finalement

$$\begin{aligned} X(z) &= E(z)\left[1-\frac{1}{10}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^k z^{-k-1}-\frac{6}{5}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^k z^{k}\right] \\ &= E(z)\left[-\frac{1}{5}-\frac{1}{10}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^k z^{-k-1}-\frac{6}{5}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^k z^{k}\right] \end{aligned}$$

ou

$$
\begin{aligned}
x_t &= -\frac{1}{5}e_t - \frac{1}{10}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^k e_{t-k-1} - \frac{6}{5}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^k e_{t+k} \\
&= -\frac{1}{5}e_t - \frac{1}{5}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^k e_{t-k} - \frac{6}{5}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^k e_{t+k}
\end{aligned}
$$

3) On suite que pour une suite ARMA x_t, l'innovation u_t est obtenue par filtrage linéaire de x_t.Si $\alpha(z)$ est la fonction de transfert de ce filtre, on a

$$
s_u(f) = s_x(f)\left|\alpha\left(f\right)\right|^2 = 1,
$$

d'où

$$
\begin{aligned}
\left|\alpha\left(f\right)\right|^2 &= \frac{1}{s_x(f)}, \\
&= \frac{1}{4}\left|e^{j2\pi f} - 3\right|^2 \left|2e^{j2\pi f} - 1\right|^2 .
\end{aligned}
$$

En réarrangeant cette expression, on obtient

$$
\begin{aligned}
\left|\alpha\left(f\right)\right|^2 &= 9\left|1 - \frac{1}{2}e^{-j2\pi f}\right|^2 \left|1 - \frac{1}{3}e^{j2\pi f}\right|^2, \\
&= 9\left|1 - \frac{1}{2}e^{-j2\pi f}\right|^2 \left|1 - \frac{1}{3}e^{-j2\pi f}\right|^2 .
\end{aligned}
$$

d'où

$$
\begin{aligned}
\alpha(z) &= 3\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1 - \frac{1}{3}z^{-1}\right), \\
&= 3\left(1 - \frac{5}{6}z^{-1} + \frac{1}{6}z^{-2}\right).
\end{aligned}
$$

On a finalement

$$
U(z) = X(z)3\left(1 - \frac{5}{6}z^{-1} + \frac{1}{6}z^{-2}\right),
$$

c'est-à-dire

$$
u_t = 3\left(x_t - \frac{5}{6}x_{t-1} + \frac{1}{6}x_{t-2}\right).
$$

4) La décomposition de Wold d'une suite ARMA x_t exprime x_t en fonction de son innovation u_t. En utilisant la question précédente, on a

$$
\begin{aligned}
X(z) &= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}\right)\left(\frac{1}{1 - \frac{1}{3}z^{-1}}\right)U(z), \\
&= \left(\frac{A}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{B}{1 - \frac{1}{3}z^{-1}}\right)U(z).
\end{aligned}
$$

Des calculs élémentaires permettent de déterminer A et B

$$B = -\frac{2}{3} \text{ et } A = 1,$$

d'où

$$X(z) = \left[\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k z^{-k} - \frac{2}{3} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^k z^{-k} \right] U(z).$$

La décomposition de Wold de x_t est donc

$$x_t = \sum_{k=0}^{\infty} \left[\left(\frac{1}{2}\right)^k - \frac{2}{3} \left(\frac{1}{3}\right)^k \right] u_{t-k}.$$