Processus Stochastiques

Jeudi 5 Janvier 2012, 14h00-16h00

Examen de Processus Stochastiques

Jeudi 5 Janvier 2012

$1^{ère}$ Partie : Chaîne de Markov

1) Il faut lire la matrice de matrice de transition $\mathbf{P}$ ligne par ligne

- de l'état e_1, on peut aller à l'état e_2 avec probabilité $\frac{1}{2}$ et à l'état e_4 avec probabilité $\frac{1}{2}$.
- de l'état e_2, on peut aller à l'état e_3 avec probabilité $\frac{1}{2}$ et à l'état e_4 avec probabilité $\frac{1}{2}$.
- de l'état e_3, on peut aller à l'état e_1 avec probabilité $\frac{1}{2}$ et à l'état e_2 avec probabilité $\frac{1}{2}$.
- de l'état e_4, on peut aller à l'état e_1 avec probabilité $\frac{1}{2}$ et à l'état e_3 avec probabilité $\frac{1}{2}$.

2) Les lois stationnaires $\pi = (\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4)$ associées à la matrice $\mathbf{P}$ vérifient

$$\left\{ \begin{array}{c} \pi = \pi \mathbf{P} \\ \sum_{k=1}^{4} \pi_k = 1 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{c} \pi_1 = \frac{1}{2}\pi_2 + \frac{1}{2}\pi_4 \\ \pi_2 = \frac{1}{2}\pi_3 + \frac{1}{2}\pi_4 \\ \pi_3 = \frac{1}{2}\pi_1 + \frac{1}{2}\pi_2 \\ \pi_4 = \frac{1}{2}\pi_1 + \frac{1}{2}\pi_3 \\ \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 + \pi_4 = 1 \end{array} \right.$$

Il est très facile de résoudre ce système d'équations à quatre inconnues. On peut par exemple utiliser la première et la troisième équation pour exprimer π_3 et π_4 en fonction de π_1 et π_2

$$\left\{ \begin{array}{c} \pi_4 = 2\pi_1 - \pi_2 \\ \pi_3 = \frac{1}{2}\pi_1 + \frac{1}{2}\pi_2 \end{array} \right. .$$

Si on remplace ces expressions de π_3 et π_4 dans la deuxième et la quatrième équation, on obtient

$$\pi_1 = \pi_2.$$

La chaîne de Markov admet donc une seule loi stationnaire définie par

$$\pi_1 = \pi_2 = \pi_3 = \pi_4 = \frac{1}{4}.$$

3) Comme toutes les colonnes de $\mathbf{P}^3$ sont constituées d'éléments strictement positifs, le théorème du cours s'applique. Donc, le chaîne de Markov admet une seule loi limite qui est aussi sa loi stationnaire.

4) On a

$$\mathbf{P}^3 = \begin{pmatrix} \frac{3}{8} & \frac{3}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{8} & \frac{3}{8} & \frac{1}{8} & \frac{3}{8} \\ \frac{3}{8} & \frac{1}{8} & \frac{3}{8} & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{3}{8} & \frac{3}{8} \end{pmatrix}$$

On peut appliquer le théorème du cours avec $n_0 = 3$ et

$$\delta = \frac{1}{8} \text{ pour toutes les colonnes, i.e., } s = 4$$

d'où

$$\|\mathbf{P}^n - \mathbf{P}^\infty\| \leq \left(1 - 4 \times \frac{1}{8}\right)^{\frac{n}{3}-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{3}-1}$$

Pour avoir $\|\mathbf{P}^n - \mathbf{P}^\infty\| \leq 10^{-2}$, il suffit donc de choisir n tel que

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{3}-1} \leq 10^{-2}.$$

En prenant le logarithme décimal, on obtient

$$\left(\frac{n}{3} - 1\right) \log_{10}\left(\frac{1}{2}\right) \leq -2$$

d'où

$$n \geq 3\left[1 + \frac{2}{\log_{10}(2)}\right] \simeq 22.93.$$

Pour avoir $\|\mathbf{P}^n - \mathbf{P}^\infty\| \leq 10^{-2}$, il suffit donc de prendre

$$n \geq 23.$$

5) Nous avons vu en cours que toute matrice de transition d'une chaine de Markov admettait $\lambda = 1$ comme valeur propre. Pour le vérifier, il suffit de déterminer $\det(P - I)$ et de remplacer la première colonne du déterminant par la somme de toutes ces colonnes. On obtient alors

$$\begin{aligned} \det(P - \lambda I) &= \begin{vmatrix} -\lambda & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & -\lambda & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\lambda & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & -\lambda \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 1-\lambda & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 1-\lambda & -\lambda & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1-\lambda & \frac{1}{2} & -\lambda & 0 \\ 1-\lambda & 0 & \frac{1}{2} & -\lambda \end{vmatrix} \\ &= (1-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & -\lambda & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} & -\lambda & 0 \\ 1 & 0 & \frac{1}{2} & -\lambda \end{vmatrix} \end{aligned}$$

qui s'annule bien pour $\lambda = 1$. Pour vérifier que $\lambda = 0$ est valeur propre de $\mathbf{P}$, il suffit de montrer que $\det(P) = 0$. Pour cela, il suffit de développer le déterminant par rapport à une de ses colonnes, par exemple la première. On obtient alors

$$\begin{aligned}
\det(P) &= \begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{vmatrix} \\
&= \frac{1}{2} \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{vmatrix} - \frac{1}{2} \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{vmatrix} \\
&= \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{8}\right) - \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{8}\right) = 0.
\end{aligned}$$

Les deux autres valeurs propres de $\mathbf{P}$ sont les racines de $2\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$ qui sont

$$\lambda_0 = \frac{-1+i}{2} \text{ et } \lambda_0^* = \frac{-1-i}{2}.$$

D'après le cours, on a donc

$$r(k) = a + b\lambda_0^{|k|} + c\lambda_0^{*|k|}.$$

Puisque $r(k) \in \mathbb{R}$, on a $a \in \mathbb{R}$ et $c = b^*$. Il suffit donc de trouver a et b. La moyenne de la chaine stationnarisée est

$$E[x_n] = \left(-2 \times \frac{1}{4}\right) + \left(-1 \times \frac{1}{4}\right) + \left(1 \times \frac{1}{4}\right) + \left(2 \times \frac{1}{4}\right) = 0.$$

Le spectre associé n'a donc pas de composante continue, ce qui se traduit par

$$a = 0.$$

On calcule alors des valeurs particulières de $r(k)$. Pour $k = 0$

$$\begin{aligned}
E\left[x_n^2\right] &= \left(4 \times \frac{1}{4}\right) + \left(1 \times \frac{1}{4}\right) + \left(1 \times \frac{1}{4}\right) + \left(4 \times \frac{1}{4}\right) = \frac{5}{2} \\
&= 2\left(b + b^*\right) = 2\mathrm{Re}\left(b\right)
\end{aligned}$$

d'où

$$\mathrm{Re}\left(b\right) = \frac{5}{4}.$$

Pour $k = 1$, on a

$$\begin{aligned}
r(1) &= E\left[x_n x_{n+1}\right] \\
&= 1 \times P\left[x_n x_{n+1} = 1\right] + (-1) \times P\left[x_n x_{n+1} = -1\right] \\
&\quad +2 \times P\left[x_n x_{n+1} = 2\right] + (-2) \times P\left[x_n x_{n+1} = -2\right] \\
&\quad +4 \times P\left[x_n x_{n+1} = 4\right] + (-4) \times P\left[x_n x_{n+1} = -4\right]
\end{aligned}$$

Mais

$$\begin{aligned}
P\left[x_n x_{n+1}=1\right] &= P\left[x_{n+1}=1 \middle| x_n=1\right] P\left[x_n=1\right] \\
&\quad + P\left[x_{n+1}=-1 \middle| x_n=-1\right] P\left[x_n=-1\right] \\
&= 0 \times \frac{1}{4} + 0 \times \frac{1}{4} \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P\left[x_n x_{n+1}=-1\right] &= P\left[x_{n+1}=-1 \middle| x_n=1\right] P\left[x_n=1\right] \\
&\quad + P\left[x_{n+1}=1 \middle| x_n=-1\right] P\left[x_n=-1\right] \\
&= \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} + 0 \times \frac{1}{4} \\
&= \frac{1}{8}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P\left[x_n x_{n+1}=2\right] &= P\left[x_{n+1}=2 \middle| x_n=1\right] P\left[x_n=1\right] \\
&\quad + P\left[x_{n+1}=1 \middle| x_n=2\right] P\left[x_n=2\right] \\
&\quad + P\left[x_{n+1}=-1 \middle| x_n=-2\right] P\left[x_n=-2\right] \\
&\quad + P\left[x_{n+1}=-2 \middle| x_n=-1\right] P\left[x_n=-1\right] \\
&= \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P\left[x_n x_{n+1}=-2\right] &= P\left[x_{n+1}=-2 \middle| x_n=1\right] P\left[x_n=1\right] \\
&\quad + P\left[x_{n+1}=-1 \middle| x_n=2\right] P\left[x_n=2\right] \\
&\quad + P\left[x_{n+1}=1 \middle| x_n=-2\right] P\left[x_n=-2\right] \\
&\quad + P\left[x_{n+1}=2 \middle| x_n=-1\right] P\left[x_n=-1\right] \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P\left[x_n x_{n+1}=4\right] &= P\left[x_{n+1}=2 \middle| x_n=2\right] P\left[x_n=2\right] \\
&\quad + P\left[x_{n+1}=-2 \middle| x_n=-2\right] P\left[x_n=-2\right] \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P\left[x_n x_{n+1}=-4\right] &= P\left[x_{n+1}=-2 \middle| x_n=2\right] P\left[x_n=2\right] \\
&\quad + P\left[x_{n+1}=2 \middle| x_n=-2\right] P\left[x_n=-2\right] \\
&= 0 \times \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} \\
&= \frac{1}{8}
\end{aligned}$$

Soit

$$\begin{aligned}
r(1) &= -1 \times \frac{1}{8} + 2 \times \frac{1}{4} - 2 \times \frac{1}{2} - 4 \times \frac{1}{8} \\
&= -\frac{9}{8} \\
&= 2\mathrm{Re}\left(b\lambda_0\right)
\end{aligned}$$

d'où

$$\mathrm{Re}\,(b\lambda_0) = -\frac{9}{16} \Rightarrow b = \frac{5}{4} - \frac{i}{8}$$

On a finalement

$$r(k) = \left(\frac{5}{4} - \frac{i}{8}\right)\left(\frac{-1+i}{2}\right)^{|k|} + \left(\frac{5}{4} + \frac{i}{8}\right)\left(\frac{-1-i}{2}\right)^{|k|}.$$

On peut simplifier cette expression en remarquant que

$$\frac{-1+i}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}\exp\left(\frac{3i\pi}{4}\right)$$

pour obtenir

$$\begin{aligned} r(k) &= 2\,\mathrm{Re}\left[\left(\frac{5}{4} - \frac{i}{8}\right)\left(\frac{-1+i}{2}\right)^{|k|}\right] \\ &= 2\,\mathrm{Re}\left[\left(\frac{5}{4} - \frac{i}{8}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{|k|}\exp\left(\frac{3i\,|k|\,\pi}{4}\right)\right] \\ &= 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{|k|}\left[\frac{5}{4}\cos\left(\frac{3i\,|k|\,\pi}{4}\right) + \frac{1}{8}\sin\left(\frac{3i\,|k|\,\pi}{4}\right)\right] \\ &= \frac{1}{4}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{|k|}\left[10\cos\left(\frac{3i\,|k|\,\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{3i\,|k|\,\pi}{4}\right)\right] \end{aligned}$$

$\boxed{\textbf{2}^{\grave{e}me}\ \textbf{Partie : Suite stationnaire}}$

1) En prenant la transformée en Z de l'équation de définition de la suite, on obtient

$$Y(z)\left(1 - az^{-1}\right) = E(z)\left(1 + \frac{1}{3}z^{-1}\right)$$

d'où

$$H(z) = \frac{Y(z)}{E(z)} = \frac{1 + \frac{1}{3}z^{-1}}{1 - az^{-1}} = \frac{z + \frac{1}{3}}{z - a}.$$

Cette transmittance admet le zéro $z = -1/3$ situé à l'intérieur du cercle unité et le pôle $z = a$ situé à l'extérieur du cercle unité. On en déduit que la a relation reliant y_t et e_t est causale si $|a| < 1$ et non-causale si $|a| > 1$.

2) Pour $a = 2$, on décompose $H(z)$ comme suit

$$\begin{aligned}
H(z) &= \frac{1+\frac{1}{3}z^{-1}}{1-2z^{-1}} \\
&= \frac{1+\frac{1}{3}z^{-1}}{-2z^{-1}}\frac{1}{1-\frac{1}{2}z} \\
&= \left(-\frac{1}{2}z-\frac{1}{6}\right)\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n z^n \\
&= -\frac{1}{6}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{-1}{6}\left(\frac{1}{2}\right)^n-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right]z^n \\
&= -\frac{1}{6}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[-\frac{7}{6}\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]z^n
\end{aligned}$$

d'où

$$y_t = -\frac{1}{6}e_t-\frac{7}{6}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n e_{t+n}$$

qui est une solution anticausale.

Pour $a = \frac{1}{2}$, on décompose $H(z)$ comme suit

$$\begin{aligned}
H(z) &= \frac{1+\frac{1}{3}z^{-1}}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} \\
&= \left(1+\frac{1}{3}z^{-1}\right)\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n z^{-n} \\
&= 1+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(\frac{1}{2}\right)^n+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right]z^{-n} \\
&= 1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5}{6}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}z^{-n} \\
&= 1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{n}z^{-n}
\end{aligned}$$

d'où

$$y_t = e_t+\frac{5}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n e_{t-n}$$

qui est une solution causale.

3) La fonction d'autocorrélation de la suite $\{y_t, t\in\mathbb{Z}\}$ est définie comme suit

$$\begin{aligned}
r(k) &= E\left[y_t y_{t+k}\right] \\
&= E\left[\left(e_t+\frac{5}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n e_{t-n}\right)\left(e_{t+k}+\frac{5}{3}\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^m e_{t+k-m}\right)\right]
\end{aligned}$$

Comme la suite $\{e_t, t \in \mathbb{Z}\}$ est constitué de variables aléatoires indépendantes, on obtient pour $k = 0$

$$\begin{aligned} r(0) &= E\left[\left(e_t + \frac{5}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n e_{t-n}\right)^2\right] \\ &= \sigma_e^2\left[1 + \frac{25}{9}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^n\right] \\ &= \frac{52}{27}\sigma_e^2. \end{aligned}$$

Par ailleurs, pour $k > 0$, on a

$$r(k) = \sigma_e^2\left[1 \times \frac{5}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^k + \frac{25}{9}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n\left(\frac{1}{2}\right)^{n+k}\right]$$

Notons que le premier terme correspond à la puissance du terme e_t (obtenu pour $m = k$) tandis que les termes de la somme correspondent aux puissances des termes e_{t-n} (obtenus pour $m = k + n$). Des calculs élémentaires conduisent alors au résultat suivant

$$\begin{aligned} r(k) &= \frac{5}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^k \sigma_e^2\left[1 + \frac{5}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^n\right] \\ &= \frac{35}{27}\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}\sigma_e^2. \end{aligned}$$

En utilisant la parité de la fonction d'autocorrélation, on obtient finalement

$$r(k) = \left\{ \begin{array}{c} \frac{52}{27}\sigma_e^2 \text{ si } k = 0 \\ \frac{35\sigma_e^2}{27}\left(\frac{1}{2}\right)^{|k|-1} \quad \text{si } k \neq 0 \end{array} \right. .$$

5) On sait que l'innovation u_t peut être obtenue par filtrage linéaire de y_t. Si on appelle $\beta(z)$ la fonction de transfert de ce filtre, on a

$$s_u(f) = 1 = |\beta(f)|^2 s_y(f)$$

d'où

$$|\beta(f)|^2 = \frac{1}{s_y(f)}.$$

La densité spectrale de puissance de y_t peut être déterminée à l'aide de l'équation de définition de la suite ARMA et de la relation de Wiener Lee

$$s_y(f) = s_e(f)\,|H(f)|^2 = \sigma_e^2\frac{\left|1 + \frac{1}{3}e^{-j2\pi f}\right|^2}{\left|1 - 2e^{-j2\pi f}\right|^2}.$$

On peut alors décomposer $1/s_y(f)$ comme suit

$$\begin{aligned} \frac{1}{s_y(f)} &= \frac{1}{\sigma_e^2}\frac{\left(1 - 2e^{-j2\pi f}\right)\left(1 - 2e^{j2\pi f}\right)}{\left(1 + \frac{1}{3}e^{-j2\pi f}\right)\left(1 + \frac{1}{3}e^{j2\pi f}\right)} \\ &= \frac{4}{\sigma_e^2}\frac{\left(1 - \frac{1}{2}e^{+j2\pi f}\right)\left(1 - \frac{1}{2}e^{-j2\pi f}\right)}{\left(1 + \frac{1}{3}e^{-j2\pi f}\right)\left(1 + \frac{1}{3}e^{j2\pi f}\right)} \end{aligned}$$

En choisissant le zéro et le pôle situés à l'intérieur du cercle unité on obtient

$$\beta(f) = \frac{2}{\sigma_e} \frac{1 - \frac{1}{2} e^{-j2\pi f}}{1 + \frac{1}{3} e^{-j2\pi f}}$$

d'où

$$\beta(z) = \frac{2}{\sigma_e} \frac{1 - \frac{1}{2} z^{-1}}{1 + \frac{1}{3} z^{-1}}.$$

On en déduit

$$\begin{aligned} U(z) &= \beta(z) Y(z) \\ &= \frac{2}{\sigma_e} \left(\frac{1 - \frac{1}{2} z^{-1}}{1 + \frac{1}{3} z^{-1}} \right) Y(z) \end{aligned}$$

soit

$$\left(1 + \frac{1}{3} z^{-1}\right) U(z) = \frac{2}{\sigma_e} \left(1 - \frac{1}{2} z^{-1}\right) Y(z)$$

et

$$u_t + \frac{1}{3} u_{t-1} = \frac{2}{\sigma_e} \left(y_t - \frac{1}{2} y_{t-1} \right).$$

La décomposition de Wold de y_t peut se déterminer facilement à l'aide de

$$\begin{aligned} Y(z) &= \frac{1}{\beta(z)} U(z) \\ &= \frac{\sigma_e \left(1 + \frac{1}{3} z^{-1}\right)}{2 \left(1 - \frac{1}{2} z^{-1}\right)} U(z) \\ &= \frac{\sigma_e}{2} \left[\frac{\frac{-2}{3} \left(1 - \frac{1}{2} z^{-1}\right) + \frac{5}{3}}{1 - \frac{1}{2} z^{-1}} \right] U(z) \\ &= \frac{\sigma_e}{2} \left[\frac{-2}{3} + \frac{5}{3} \frac{1}{1 - \frac{1}{2} z^{-1}} \right] U(z) \\ &= \frac{\sigma_e}{2} \left[\frac{-2}{3} + \frac{5}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n z^{-n} \right] U(z) \\ &= \frac{\sigma_e}{2} \left[1 + \frac{5}{3} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n z^{-n} \right] U(z) \end{aligned}$$

La décomposition de Wold de y_t est donc

$$y_t = \frac{\sigma_e}{2} \left[u_t + \frac{5}{3} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n u_{t-n} \right]$$

On notera en particulier que y_t est une fonction causale de la suite des innovations$\{u_t, t \in \mathbb{Z}\}$.

$3^{ème}$ Partie : Méthodes de Simulation

1) Les algorithmes étudiés en cours basés sur l'échantillonneur de Gibbs ou la méthode de Metropolis Hastings peuvent s'appliquer lorsque la loi selon laquelle on veut simuler est définie à une constante multiplicative près.
2) La loi conditionnelle $f(\theta|\,\eta)$ peut se déterminer comme suit

$$\begin{aligned} f(\theta|\,\eta) &\propto f(\theta,\eta) \\ &\propto \exp\left(-\frac{\theta^2}{2}\right)\exp\left[-\frac{\eta\theta^2}{2}\right] = \exp\left[-\frac{\theta^2}{2}(1+\eta)\right]. \end{aligned}$$

C'est une loi normale de moyenne nulle ($m=0$) et de variance

$$\sigma^2 = \frac{1}{1+\eta}.$$

La loi conditionnelle $f(\eta|\,\theta)$ peut se déterminer comme suit

$$\begin{aligned} f(\eta|\,\theta) &\propto f(\theta,\eta) \\ &\propto \eta^2\exp\left[-\frac{\eta\left(1+\theta^2\right)}{2}\right]. \end{aligned}$$

C'est une loi gamma de paramètres

$$a = 3 \text{ et } b = \frac{1+\theta^2}{2}.$$

3) Le principe de l'échantillonneur de Gibbs est de simuler des variables distribuées suivant les lois conditionnelles de la loi d'intérêt. Dans le cas présent, il peut être décrit de la façon suivante

Initialisation

Générer θ et η par exemple uniformément sur des intervalles contenant les valeurs les plus probables de θ et η et noter $\theta^{(0)}$ et $\eta^{(0)}$ les valeurs obtenues

Itérations

Pour $k=1,...,K$, effectuer les simulations suivantes

- Générer suivant $f(\theta|\,\eta^{(k-1)})$ et noter $\theta^{(k)}$ la valeur obtenue
- Générer suivant $f(\eta|\,\theta^{(k)})$ et noter $\eta^{(k)}$ la valeur obtenue

4) Après avoir simulé K vecteurs notés $\left(\boldsymbol{\theta}^{(k)},\eta^{(k)}\right), k=1,...,K$ distribués suivant $f(\theta,\eta)$, on peut estimer les paramètres θ et η à l'aide des estimateurs MAP ou MMSE. Si la période de chauffage de la chaîne de Markov est de longueur k_0 et qu'on décide d'utiliser les estimateurs MAP, on obtiendra

$$\left(\widehat{\theta}_{\text{MAP}},\widehat{\eta}_{\text{MAP}}\right) = \arg\max_{k=k_0+1,...,K} f\left(\boldsymbol{\theta}^{(k)},\eta^{(k)}\right)$$

La période de chauffage (burn-in) de l'échantillonneur de Gibbs est la période qu'il faut attendre pour que les vecteurs simulés $\left(\boldsymbol{\theta}^{(k)},\eta^{(k)}\right)$ soient distribués suivant la loi cible.