**Processus Stochastiques**

Jeudi 20 décembre 2013, 14h00-16h00

# Examen de Processus Stochastiques

## $1^{ère}$ Partie : Chaîne de Markov

### Enoncé

*On considère une chaîne de Markov $x_n$ à trois états $e_1 = 0, e_2 = 1, e_3 = 2$ de matrice de transition*

$$\mathbf{P}(a,b) = \begin{pmatrix} a & 1-a-b & b \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

*L'objectif de cet exercice est d'étudier quelques propriétés de cette chaîne de Markov pour deux valeurs du vecteur $(a,b)$.*

*1) On suppose dans cette partie que $a = b = \frac{1}{2}$.*

*1.1) Etudier les lois stationnaires de cette chaîne de Markov.*

*1.2) Déterminer*

$$\mathbf{P}^\infty = \lim_{n\to\infty} \mathbf{P}^n \text{ et } \mathbf{q}^\infty = \lim_{n\to\infty} q(n)$$

*avec $q(n) = [P(x_n = 0), P(x_n = 1), P(x_n = 2)]$.*

*1.3) Déterminer une valeur minimum de $n$ pour laquelle $\|\mathbf{P}^n - \mathbf{P}^\infty\| \leq 10^{-2}$.*

*2) On suppose dans cette partie que $a = 1$ (et donc que $b = 0$).*

*2.1) Etudier les lois stationnaires de cette chaîne de Markov.*

*2.2) On ordonne les trois états de la chaîne de Markov notés $e_1^*, e_2^*, e_3^*$ de façon à avoir $e_1^* = 0, e_2^* = 2, e_3^* = 1$. Donner la matrice de transition associée $\mathbf{P}^*$ et déterminer $(\mathbf{P}^*)^n$ pour tout $n \in N$.*

*2.3)On suppose qu'à l'instant $n = 0$, la chaîne de Markov est dans l'état $e_3^* = 1$, c'est-à-dire que*

$$q^*(0) = [P(x_n = 0), P(x_n = 2), P(x_n = 1)] = [0, 0, 1].$$

*On appelle $T$ le premier instant à partir duquel $x_n$ quitte l'état $e_3^* = 1$. Montrer que*

$$P[T = n] = P[x_n \neq 1 | x_{n-1} = 1] P[x_{n-1} = 1].$$

*En déduire la loi de $T$.*

*2.4) Retrouver le résultat de la question précédente en calculant directement*

$$P[T = n] = P[x_n \neq 1, x_{n-1} = 1, ..., x_1 = 1 | x_0 = 1].$$

**Correction**

1) La matrice de transition s'écrit donc

$$\mathbf{P}_1 = \mathbf{P}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1.1) Les lois stationnaires de la chaîne de Markov vérifient

$$\left\{ \begin{array}{c} \pi = \pi \mathbf{P}_1 \\ \sum_{k=0}^{2} \pi_k = 1 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{c} \pi_0 = \frac{1}{2}\pi_0 + \frac{1}{3}\pi_1 \\ \pi_1 = \frac{1}{3}\pi_1 \\ \pi_2 = \frac{1}{2}\pi_0 + \frac{1}{3}\pi_1 + \pi_2 \\ \pi_0 + \pi_1 + \pi_2 = 1 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} \pi_0 = 0 \\ \pi_1 = 0 \\ \pi_2 = 1 \end{array} \right.$$

La chaîne de Markov admet donc une seule loi stationnaire définie par

$$\pi = (0, 0, 1).$$

1.2) Comme la dernière de $\mathbf{P}_1$ est constituée d'éléments strictement positifs, le théorème du cours s'applique. Donc, la chaîne de Markov admet une seule loi limite qui est aussi sa loi stationnaire. On en déduit

$$\mathbf{P}_1^{\infty} = \lim_{n \to \infty} \mathbf{P}_1^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } \mathbf{q}^{\infty} = \lim_{n \to \infty} q(n) = (0, 0, 1)$$

1.3) Puisque la dernière colonne de $\mathbf{P}_1$ est constitué d'éléments strictement positifs, on peut appliquer le théorème du cours avec $n_0 = 1$ et

$$\delta = \frac{1}{3}$$

d'où

$$\|\mathbf{P}_1^n - \mathbf{P}_1^{\infty}\| \leq \left(1 - \frac{1}{3}\right)^{n-1} = \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$$

Pour avoir $\|\mathbf{P}_1^n - \mathbf{P}_1^{\infty}\| \leq 10^{-2}$, il suffit donc de choisir $n$ tel que

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} \leq 10^{-2}.$$

En prenant le logarithme décimal, on obtient

$$(n-1)\log_{10}\left(\frac{2}{3}\right) \leq -2$$

d'où

$$n \geq 1 + \frac{-2}{\log_{10}(2/3)} \simeq 12,36.$$

Pour avoir $\|\mathbf{P}^n - \mathbf{P}^{\infty}\| \leq 10^{-2}$, il suffit donc de prendre

$$n \geq 13.$$

2) La matrice de transition s'écrit donc

$$\mathbf{P}_2 = \mathbf{P}(1,0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2.1) Les lois stationnaires de la chaîne de Markov vérifient

$$\left\{ \begin{array}{c} \pi = \pi \mathbf{P}_2 \\ \sum_{k=0}^{2} \pi_k = 1 \end{array} \right. \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \pi_0 = \pi_0 + \frac{1}{3}\pi_1 \\ \pi_1 = \frac{1}{3}\pi_1 \\ \pi_2 = \frac{1}{3}\pi_1 + \pi_2 \\ \pi_0 + \pi_1 + \pi_2 = 1 \end{array} \right. \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \pi_1 = 0 \\ \pi_0 + \pi_2 = 1 \end{array} \right.$$

La chaîne de Markov admet donc une infinité de lois stationnaires définies par

$$\pi_a = (a, 0, 1-a) \text{ avec } a \in [0,1].$$

2.2) On a facilement

$$\mathbf{P}_2^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

Le calcul de $(\mathbf{P}_2^*)^n$ est classique (voir exercices polycopié de cours) en utilisant la décomposition par blocs

$$\mathbf{P}_2^* = \begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{C} & 1/3 \end{pmatrix}$$

avec ici

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{C} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Des calculs élémentaires permettent d'obtenir par récurrence

$$(\mathbf{P}_2^*)^n = \begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \frac{1-\frac{1}{3^n}}{1-\frac{1}{3}}\mathbf{C} & \frac{1}{3^n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{I} & & \mathbf{0} \\ \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3^n}\right) & \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3^n}\right) & \frac{1}{3^n} \end{pmatrix}$$

On en déduit

$$(\mathbf{P}_2^*)^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3^n}\right) & \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3^n}\right) & \frac{1}{3^n} \end{pmatrix}$$

2.3) Puisque $q^*(0) = (0,0,1)$, la chaîne vérifie $x_0 = 1$, d'où

$$\begin{aligned} P[T=n] &= P[x_n \neq 1, x_{n-1} = 1, ..., x_1 = 1 | x_0 = 1] \\ &= P[x_n \neq 1, x_{n-1} = 1] \\ &= P[x_n \neq 1 | x_{n-1} = 1] P[x_{n-1} = 1] \\ &= \frac{2}{3} P[x_{n-1} = 1] \end{aligned}$$

Pour calculer $P\left[x_{n-1}=1\right]$, on utilise la relation

$$
\begin{aligned}
q^*(n-1) &= q^*(0)\left(\mathbf{P}_2^*\right)^{n-1} \\
&= (0,0,1)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3^{n-1}}\right) & \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3^{n-1}}\right) & \frac{1}{3^{n-1}} \end{pmatrix} \\
&= \left[\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3^{n-1}}\right), \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3^{n-1}}\right), \frac{1}{3^{n-1}}\right]
\end{aligned}
$$

d'où

$$P\left[x_{n-1}=1\right]=\frac{1}{3^{n-1}}.$$

On en déduit la loi de $T$

$$P[T=n]=\frac{2}{3^n}, n \geq 1$$

2.4) En utilisant le résultat

$$P[T=n]=P\left[x_n \neq 1, x_{n-1}=1, \ldots, x_1=1 \mid x_0=1\right]$$

et la proprité de Markov, on obtient

$$
\begin{aligned}
P[T=n] &= P\left[x_n \neq 1, x_{n-1}=1, \ldots, x_1=1 \mid x_0=1\right] \\
&= P\left[x_n \neq 1 \mid x_{n-1}=1\right] P\left[x_{n-1}=1 \mid x_{n-2}=1\right] \times \ldots \times P\left[x_1=1 \mid x_0=1\right] \\
&= \underbrace{\frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}\right) \times \ldots \times\left(\frac{1}{3}\right)}_{n-1 \text{ fois}} \\
&= \frac{2}{3^n}, n \geq 1.
\end{aligned}
$$

On retrouve bien le résultat de la question précédente.

## $\boxed{\mathbf{2}^{\grave{e}me}\ \textbf{Partie : Suite stationnaire}}$

**Enoncé**

*On considère la suite stationnaire AR définie par l'équation récurrente*

$$x_t-\frac{7}{2} x_{t-1}+\frac{3}{2} x_{t-2}=e_t, \qquad t \in \mathbb{Z}$$

*où $\{e_t, t \in \mathbb{Z}\}$ est un bruit blanc (de moyenne nulle) et de variance $\sigma_e^2$.*
*1) Déterminer la transmittance $H(z)$ du filtre dont la sortie est la suite $\{x_t, t \in \mathbb{Z}\}$ lorsque l'entrée est la suite $\{e_t, t \in \mathbb{Z}\}$. Déterminer les pôles et les zéros de $H(z)$ et en déduire la forme de la relation reliant $x_t$ et $e_t$ (causale, anti-causale, ou avec une partie causale et une partie anti-causale).*
*2) Exprimer $x_t$ en fonction des éléments de la suite $\{e_t, t \in \mathbb{Z}\}$.*
*3) Déterminer l'innovation de la suite AR notée $\{u_t, t \in \mathbb{Z}\}$ et la décomposition de Wold de la suite $\{x_t, t \in \mathbb{Z}\}$.*

*4) Exprimer la transformée en $Z$ de la suite $\{u_t, t \in \mathbb{Z}\}$ notée $U(z)$ en fonction de celle de la suite $\{e_t, t \in \mathbb{Z}\}$ notée $E(z)$. En déduire que l'innovation $u_t$ est une suite ARMA d'entrée $\{e_t, t \in \mathbb{Z}\}$ dont on précisera l'équation de récurrence.*

**Correction**

1) En prenant la transformée en $Z$ de l'équation de définition de la suite, on obtient

$$X(z)\left(1 - \frac{7}{2}z^{-1} + \frac{3}{2}z^{-2}\right) = E(z)$$

d'où

$$H(z) = \frac{X(z)}{E(z)} = \frac{1}{1 - \frac{7}{2}z^{-1} + \frac{3}{2}z^{-2}} = \frac{2z^2}{2z^2 - 7z + 3}.$$

Cette transmittance admet un zéro $z = 0$ et deux pôles solutions de l'équation

$$2z^2 - 7z + 3 = 0.$$

Les solutions de cette équation (qui se factorise en $(2z-1)(z-3)$) sont

$$z_1 = 3 \text{ et } z_2 = \frac{1}{2}.$$

Il y a donc un pôle à l'intérieur du cercle unité et un pôle à l'intérieur du cercle unité. On en déduit que la relation reliant $x_t$ et $e_t$ n'est ni causale, ni anti-causale et s'écrit

$$x_t = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_k e_{t-k}$$

2) Pour exprimer $x_t$ en fonction de $e_t$, on doit décomposer $H(z)$ en éléments simples

$$\begin{aligned}
H(z) &= \frac{1}{1 - \frac{7}{2}z^{-1} + \frac{3}{2}z^{-2}} \\
&= \frac{2}{2 - 7z^{-1} + 3z^{-2}} \\
&= \frac{2}{(3z^{-1} - 1)(z^{-1} - 2)} \\
&= -\frac{6}{5}\frac{1}{3z^{-1} - 1} + \frac{2}{5}\frac{1}{z^{-1} - 2} \\
&= -\frac{6}{5}\left(\frac{1}{3z^{-1}}\right)\frac{1}{1 - \frac{1}{3}z} - \frac{1}{5}\frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} \\
&= -\frac{6}{5}\left(\frac{z}{3}\right)\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n z^n - \frac{1}{5}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n z^{-n} \\
&= -\frac{6}{5}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n z^n - \frac{1}{5}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n z^{-n}
\end{aligned}$$

d'où

$$x_t = -\frac{6}{5}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n e_{t+n} - \frac{1}{5}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n e_{t-n}$$

qui est une solution comportant une partie causale et une partie anti-causale.
3) On sait que l'innovation $u_t$ peut être obtenue par filtrage linéaire de $x_t$. Si on appelle $\beta(z)$ la fonction de transfert de ce filtre, on a

$$s_u(f) = 1 = |\beta(f)|^2 \, s_x(f)$$

d'où

$$|\beta(f)|^2 = \frac{1}{s_x(f)}.$$

La densité spectrale de puissance de $x_t$ peut être déterminée à l'aide de l'équation de définition de la suite AR et de la relation de Wiener Lee

$$\begin{aligned} s_x(f) &= s_e(f)\,|H(f)|^2 \\ &= \sigma_e^2 \frac{4}{|(3e^{-j2\pi f}-1)\,(e^{-j2\pi f}-2)|^2} \\ &= \frac{\sigma_e^2}{9} \frac{1}{\left|\left(1-\frac{1}{3}e^{-j2\pi f}\right)\left(1-\frac{1}{2}e^{-j2\pi f}\right)\right|^2} \end{aligned}$$

d'où

$$|\beta(f)|^2 = \frac{9}{\sigma_e^2}\left|\left(1-\frac{1}{3}e^{-j2\pi f}\right)\left(1-\frac{1}{2}e^{-j2\pi f}\right)\right|^2$$

En choisissant les zéros situés à l'intérieur du cercle unité on obtient

$$\beta(f) = \frac{3}{\sigma_e}\left(1-\frac{1}{3}e^{-j2\pi f}\right)\left(1-\frac{1}{2}e^{-j2\pi f}\right)$$

d'où

$$\begin{aligned} \beta(z) &= \frac{3}{\sigma_e}\left(1-\frac{1}{3}z^{-1}\right)\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right) \\ &= \frac{3}{\sigma_e}\left(1-\frac{5}{6}z^{-1}+\frac{1}{6}z^{-2}\right) \end{aligned}$$

On en déduit

$$\begin{aligned} U(z) &= \beta(z)X(z) \\ &= \frac{3}{\sigma_e}\left(1-\frac{5}{6}z^{-1}+\frac{1}{6}z^{-2}\right)X(z) \end{aligned}$$

soit

$$u_t = \frac{3}{\sigma_e}\left(x_t-\frac{5}{6}x_{t-1}+\frac{1}{6}x_{t-2}\right)$$

La décomposition de Wold de $x_t$ peut se déterminer facilement à l'aide de

$$\begin{aligned}
X(z) &= \frac{1}{\beta(z)}U(z) \\
&= \frac{\sigma_e}{3}\frac{1}{\left(1-\frac{1}{3}z^{-1}\right)\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)}U(z) \\
&= \frac{\sigma_e}{3}\left[\frac{-2}{1-\frac{1}{3}z^{-1}}+\frac{3}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}\right]U(z) \\
&= \frac{\sigma_e}{3}\left[-2\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n z^{-n}+3\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n z^{-n}\right]U(z) \\
&= U(z) \\
&= \sigma_e\left[\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n z^{-n}-2\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} z^{-n}\right]U(z)
\end{aligned}$$

La décomposition de Wold de $x_t$ est donc

$$x_t = \sigma_e\sum_{n=0}^{\infty}\left[\left(\frac{1}{2}\right)^n-2\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right]u_{t-n}$$

On notera en particulier que $x_t$ est une fonction causale de la suite des innovations$\{u_t, t\in\mathbb{Z}\}$.
4) On a vu

$$\begin{aligned}
U(z) &= \beta(z)X(z) \\
&= \frac{3}{\sigma_e}\left(1-\frac{1}{3}z^{-1}\right)\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)X(z)
\end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned}
X(z) &= H(z)E(z) \\
&= \frac{2}{\left(3z^{-1}-1\right)\left(z^{-1}-2\right)}E(z)
\end{aligned}$$

On en déduit

$$\begin{aligned}
U(z) &= \frac{3}{\sigma_e}\left(1-\frac{1}{3}z^{-1}\right)\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)\frac{2}{\left(3z^{-1}-1\right)\left(z^{-1}-2\right)}E(z) \\
&= \frac{3}{\sigma_e}\left(1-\frac{1}{3}z^{-1}\right)\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)\frac{1}{\left(1-3z^{-1}\right)\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)}E(z) \\
&= \frac{3}{\sigma_e}\frac{1-\frac{1}{3}z^{-1}}{1-3z^{-1}}E(z)
\end{aligned}$$

ou de manière équivalent

$$\left(1-3z^{-1}\right)U(z) = \frac{3}{\sigma_e}\left(1-\frac{1}{3}z^{-1}\right)E(z).$$

Il s'agit d'une suite ARMA d"équation de récurrence

$$u_t - 3u_{t-1} = \frac{3}{\sigma_e}e_t - \frac{1}{\sigma_e}e_{t-1}.$$

$\boxed{\textbf{3}^{\grave{e}me} \textbf{ Partie : Méthodes de Simulation}}$

**Enoncé**

*L'objectif de cet exercice est de proposer une méthode de simulation permettant de générer des paramètre* $(\beta, \lambda)$ *suivant la loi jointe*

$$f(\beta, \lambda) \propto \left[\frac{\lambda^{\alpha-1}\beta^{\alpha-1}\exp(-\beta\lambda)}{\Gamma(\alpha)}\right]\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{\lambda^{x_i}}{x_i!}e^{-\lambda}\right)I_{\mathbb{R}^+}(\lambda)\, I_{\mathbb{R}^+}(\beta)$$

*où* $\propto$ *signifie "proportionnel à",* $I_{\mathbb{R}^+}(x)$ *est la fonction indicatrice sur* $R^+$ *telle que*

$$I_{\mathbb{R}^+}(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x > 0 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

$\alpha$ *est un paramètre connu et* $x_1, ..., x_n$ *sont* $n$ *observations (qui sont également connues). On rappelle qu'une variable aléatoire* $X$ *suit une loi gamma de paramètres* $a$ *et* $b$ *(ce que l'on notera* $X \sim G(a, b)$*) si sa densité s'écrit*

$$f(x\,|a, b) = \frac{b^a}{\Gamma(a)}x^{a-1}e^{-bx}, x > 0$$

*1) Expliquer pourquoi le fait de ne connaître* $f(\beta, \lambda)$ *qu'à un facteur multiplicatif près ne pose pas de problème pour simuler des vecteurs distribués cette loi.*
*2) Déterminer les lois conditionnelles* $f(\beta|\,\lambda)$ *et* $f(\lambda|\,\beta)$ *et montrer que ce sont des lois gamma dont on précisera les paramètres.*
*3) Rappeler le principe de l'échantillonneur de Gibbs permettant de générer des vecteurs distribués suivant la loi* $f(\beta, \lambda)$*.*
*4) Après avoir simulé* $K$ *vecteurs notés* $\left(\boldsymbol{\beta}^{(k)}, \lambda^{(k)}\right)$ *(pour* $k = 1, ..., K$*) distribués suivant* $f(\beta, \lambda)$*, expliquer comment on peut estimer les paramètres* $\beta$ *et* $\lambda$*. Qu'est ce que la période de chauffage (burn-in) de l'échantillonneur de Gibbs ?*

**Correction**

1) Les algorithmes étudiés en cours basés sur l'échantillonneur de Gibbs ou la méthode de Metropolis Hastings peuvent s'appliquer lorsque la loi selon laquelle on veut simuler est définie à une constante multiplicative près.
2) La loi conditionnelle $f(\beta|\,\lambda)$ peut se déterminer comme suit

$$\begin{aligned} f(\beta|\,\lambda) &\propto f(\beta, \lambda) \\ &\propto \beta^{\alpha-1}\exp(-\beta\lambda)\, I_{\mathbb{R}^+}(\beta) \end{aligned}$$

C'est une loi gamma de paramètres $\alpha$ et $\lambda$

$$\beta|\,\lambda \sim G(\alpha, \lambda)\,.$$

La densité conditionnelle $f(\lambda|\,\beta)$ peut se déterminer de manière similaire

$$\begin{aligned} f(\lambda|\,\beta) &\propto f(\beta, \lambda) \\ &\propto \lambda^{\alpha-1+\sum_{i=1}^{n}x_i}\exp[-(n+\beta)\lambda]\, I_{\mathbb{R}^+}(\lambda)\,. \end{aligned}$$

C'est une loi gamma de paramètres

$$a = \alpha + \sum_{i=1}^{n} x_i \text{ et } b = n + \beta.$$

3) Le principe de l'échantillonneur de Gibbs est de simuler des variables distribuées suivant les lois conditionnelles de la loi d'intérêt. Dans le cas présent, il peut être décrit de la façon suivante

**Initialisation**

Générer $\beta$ et $\lambda$ par exemple uniformément sur des intervalles contenant les valeurs les plus probables de $\beta$ et $\lambda$ noter $\beta^{(0)}$ et $\lambda^{(0)}$ les valeurs obtenues

**Itérations**

Pour $k = 1, ..., K$, effectuer les simulations suivantes

- Générer suivant $f(\beta|\,\lambda^{(k-1)})$ et noter $\beta^{(k)}$ la valeur obtenue
- Générer suivant $f(\lambda|\,\beta^{(k)})$ et noter $\lambda^{(k)}$ la valeur obtenue

4) Après avoir simulé $K$ vecteurs notés $\left(\boldsymbol{\beta}^{(k)}, \lambda^{(k)}\right), k = 1, ..., K$ distribués suivant $f(\beta, \lambda)$, on peut estimer les paramètres $\beta$ et $\lambda$ à l'aide des estimateurs MAP ou MMSE. Si la période de chauffage de la chaîne de Markov est de longueur $k_0$ et qu'on décide d'utiliser les estimateurs MAP, on obtiendra

$$\left(\widehat{\beta}_{\text{MAP}}, \widehat{\lambda}_{\text{MAP}}\right) = \arg \max_{k=k_0+1,...,K} f\left(\beta^{(k)}, \lambda^{(k)}\right)$$

La période de chauffage (burn-in) de l'échantillonneur de Gibbs est la période qu'il faut attendre pour que les vecteurs simulés $\left(\beta^{(k)}, \lambda^{(k)}\right)$ soient distribués suivant la loi cible.

**Barème**

Exercice 1 (7 points)

1) 1.1) $\pi = (0, 0, 1)$ (1 point), 1.2) $\mathbf{P}_1^{\infty}$ et $\mathbf{q}^{\infty}$ (1 point), 1.3) $n \geq 13$ (1 point)

2) 2.1) $\pi = (a, 0, 1 - a)$ (1 point), 2.2) $\mathbf{P}_1^{n}$ (1 point) et $P[T = n]$(1 point), 2.3) $P[T = n]$(1 point)

Exercice 2 (7 points)

1) $H(z) = \frac{2z^2}{2z^2-7z+3}$ (1 point), pole, zéros + causalité (1 point)

2) Solution (2 points)

$$x_t = -\frac{6}{5} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n e_{t+n} - \frac{1}{5} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n e_{t-n}$$

3) Innovation (1 point)

$$u_t = \frac{3}{\sigma_e} \left(x_t - \frac{5}{6} x_{t-1} + \frac{1}{6} x_{t-2}\right)$$

Wold (1 point)

$$x_t = \sigma_e \sum_{n=0}^{\infty} \left[\left(\frac{1}{2}\right)^n - 2\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right] u_{t-n}$$

4) ARMA (1 point)

$$u_t - 3u_{t-1} = \frac{3}{\sigma_e} e_t - \frac{1}{\sigma_e} e_{t-1}.$$

Exercice 3 (7 points)
1) proportionalité (1 point)
2) lois conditionnelles (2 points)

$$\begin{aligned} \beta|\,\lambda &\sim G\left(\alpha,\lambda\right) \\ \lambda|\,\beta &\sim G\left(\alpha+\sum_{i=1}^{n}x_i, n+\beta\right) \end{aligned}$$

3) Principe de Gibbs (1 point)
4) Estimateurs de $\beta$ et $\lambda$ et burn-in (2 points)