Processus Stochastiques

Jeudi 5 Janvier 2012, 14h00-16h00

INP TOULOUSE ENSEEIHT

$1^{\text{ère}}$ Partie : Chaîne de Markov

On considère une chaîne de Markov à quatre états $e_1 = -1, e_2 = -2, e_3 = 1$ et $e_4 = 2$ dont la matrice de transition est définie par

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

1) Donner les transitions possibles à partir de chaque état et les probabilités associées.
2) Etudier les lois stationnaires de cette chaîne de Markov.
3) Des calculs élémentaires permettent d'obtenir

$$\mathbf{P}^2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \text{ et } \mathbf{P}^3 = \begin{pmatrix} \frac{3}{8} & \frac{3}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{8} & \frac{3}{8} & \frac{1}{8} & \frac{3}{8} \\ \frac{3}{8} & \frac{1}{8} & \frac{3}{8} & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{3}{8} & \frac{3}{8} \end{pmatrix}.$$

En appliquant le théorème du cours, montrer que cette chaîne de Markov admet une unique loi limite que l'on déterminera.
4) Déterminer

$$\mathbf{P}^\infty = \lim_{n \to \infty} \mathbf{P}^n$$

et déterminer une valeur de n pour laquelle $\|\mathbf{P}^n - \mathbf{P}^\infty\| \leq 10^{-2}$.
5) Justifier le fait que $\lambda = 0$ et $\lambda = 1$ sont des valeurs propres de la matrice $\mathbf{P}$ (sans utiliser l'expression du polynôme caractéristique donnée ci-dessous).Déterminer la fonction d'autocorrélation de cette chaîne de Markov. On admettra que le polynôme caractéristique de la matrice $\mathbf{P}$ s'écrit

$$\det(P - \lambda I) = \frac{1}{2}\lambda(\lambda - 1)\left(2\lambda^2 + 2\lambda + 1\right).$$

$2^{\text{ème}}$ Partie : Suite stationnaire

On considère la suite stationnaire ARMA définie par l'équation récurrente

$$y_t - a y_{t-1} = e_t + \frac{1}{3} e_{t-1}, \qquad t \in \mathbb{Z}$$

où $\{e_t, t \in \mathbb{Z}\}$ est un bruit blanc (de moyenne nulle) et de variance σ_e^2.
1) Déterminer la transmittance $H(z)$ du filtre dont la sortie est la suite $\{y_t, t \in \mathbb{Z}\}$ lorsque l'entrée est la suite $\{e_t, t \in \mathbb{Z}\}$. Déterminer le pôle et le zéro de $H(z)$ et en déduire en fonction des valeurs de a si la relation reliant y_t et e_t est causale ou non-causale.
2) Exprimer y_t en fonction des éléments de la suite $\{e_t, t \in \mathbb{Z}\}$ pour $a = 2$ et $a = \frac{1}{2}$.
3) Pour $a = \frac{1}{2}$, déterminer la fonction d'autocorrélation de la suite $\{y_t, t \in \mathbb{Z}\}$.
4) Pour $a = 2$, montrer que l'innovation de la suite y_t notée u_t est la sortie d'un filtre ARMA dont l'entrée est la suite $\{y_t, t \in \mathbb{Z}\}$. Déterminer la décomposition de Wold de y_t.

$\boxed{\textbf{3}^{ème}\textbf{ Partie : Méthodes de Simulation}}$

L'objectif de cet exercice est de proposer une méthode de simulation permettant d'estimer les paramètre (θ, η) distribuées suivant la loi

$$f(\theta, \eta) \propto \eta^2 \exp\left(-\frac{\theta^2}{2}\right) \exp\left[-\frac{\eta\left(1+\theta^2\right)}{2}\right]$$

où $\propto$ signifie “proportionnel à”. On rappelle qu'une variable aléatoire X suit une loi normale de paramètres m et σ^2 (ce que l'on notera $X \sim \mathcal{N}\left(m, \sigma^2\right)$) si sa densité s'écrit

$$f(x \left| m, \sigma^2 \right.) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left[-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right], x \in \mathbb{R}.$$

De même, on dit qu'une variable aléatoire X suit une loi gamma de paramètres a et b (ce que l'on notera $X \sim \mathcal{G}(a, b)$) si sa densité s'écrit

$$f(x \left| a, b \right.) = \frac{b^a}{\Gamma(a)} x^{a-1} e^{-bx}, x > 0$$

1)Expliquer pourquoi le fait de ne connaître $f(\theta, \eta)$ qu'à un facteur multiplicatif près ne pose pas de problème pour simuler des vecteurs distribués cette loi.
2) Déterminer les lois conditionnelles $f(\theta|\,\eta)$ et $f(\eta|\,\theta)$ et montrer que ce sont respectivement des lois normale et gamma dont on précisera les paramètres.
3) Rappeler le principe de l'échantillonneur de Gibbs permettant de générer des vecteurs distribués suivant la loi $f(\theta, \eta)$.
4) Après avoir simulé K vecteurs notés $\left(\boldsymbol{\theta}^{(k)}, \eta^{(k)}\right)$ (pour $k = 1, ..., K$) distribués suivant $f(\theta, \eta)$, expliquer comment on peut estimer les paramètres θ et η à l'aide de leur estimateur MAP. Qu'est ce que la période de chauffage (burn-in) de l'échantillonneur de Gibbs ?