Processus Stochastiques

Jeudi 20 décembre 2013, 14h00-16h00

$1^{ère}$ Partie : Chaîne de Markov

On considère une chaîne de Markov x_n à trois états $e_1 = 0, e_2 = 1, e_3 = 2$ de matrice de transition

$$\mathbf{P}(a, b) = \begin{pmatrix} a & 1-a-b & b \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

L'objectif de cet exercice est d'étudier quelques propriétés de cette chaîne de Markov pour deux valeurs différentes du vecteur (a, b).

1) On suppose dans cette partie que $a = b = \frac{1}{2}$.

1.1) Etudier les lois stationnaires de cette chaîne de Markov.

1.2) Déterminer

$$\mathbf{P}^\infty = \lim_{n\to\infty} \mathbf{P}^n \text{ et } \mathbf{q}^\infty = \lim_{n\to\infty} q(n)$$

avec $q(n) = [P(x_n = 0), P(x_n = 1), P(x_n = 2)]$.

1.3) Déterminer une valeur minimum de n pour laquelle $\|\mathbf{P}^n - \mathbf{P}^\infty\| \leq 10^{-2}$.

2) On suppose dans cette partie que $a = 1$ (et donc que $b = 0$).

2.1) Etudier les lois stationnaires de cette chaîne de Markov.

2.2) On ordonne les trois états de la chaîne de Markov notés e_1^*, e_2^*, e_3^* de façon à avoir $e_1^* = 0, e_2^* = 2, e_3^* = 1$. Donner la matrice de transition associée $\mathbf{P}^*$ et déterminer $(\mathbf{P}^*)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2.3) On suppose qu'à l'instant $n = 0$, la chaîne de Markov est dans l'état $e_3^* = 1$, c'est-à-dire que

$$q^*(0) = [P(x_0 = 0), P(x_0 = 2), P(x_0 = 1)] = [0, 0, 1].$$

On appelle T le premier instant n à partir duquel x_n quitte l'état $e_3^* = 1$. Montrer que

$$P[T = n] = P[x_n \neq 1 | x_{n-1} = 1] P[x_{n-1} = 1].$$

En déduire la loi de T.

2.4) Retrouver le résultat de la question précédente en calculant directement

$$P[T = n] = P[x_n \neq 1, x_{n-1} = 1, ..., x_1 = 1 | x_0 = 1].$$

$2^{ème}$ Partie : Suite stationnaire

On considère la suite stationnaire AR définie par l'équation récurrente

$$x_t - \frac{7}{2}x_{t-1} + \frac{3}{2}x_{t-2} = e_t, \qquad t \in \mathbb{Z}$$

où $\{e_t, t \in \mathbb{Z}\}$ est un bruit blanc (de moyenne nulle) et de variance σ_e^2.

1) Déterminer la transmittance $H(z)$ du filtre dont la sortie est la suite $\{x_t, t \in \mathbb{Z}\}$ lorsque l'entrée est la suite $\{e_t, t \in \mathbb{Z}\}$. Déterminer les pôles et les zéros de $H(z)$ et en déduire la forme de la relation reliant x_t et e_t (causale, anti-causale, ou avec une partie causale et une partie anti-causale).

2) Exprimer x_t en fonction des éléments de la suite $\{e_t, t \in \mathbb{Z}\}$.

3) Déterminer l'innovation de la suite AR notée $\{u_t, t \in \mathbb{Z}\}$ et la décomposition de Wold de la suite $\{x_t, t \in \mathbb{Z}\}$.

4) Exprimer la transformée en Z de la suite $\{u_t, t \in \mathbb{Z}\}$ notée $U(z)$ en fonction de celle de la suite $\{e_t, t \in \mathbb{Z}\}$ notée $E(z)$. En déduire que l'innovation u_t est une suite ARMA d'entrée $\{e_t, t \in \mathbb{Z}\}$ dont on précisera l'équation de récurrence.

$3^{ème}$ Partie : Méthodes de Simulation

L'objectif de cet exercice est de proposer une méthode de simulation permettant de générer des vecteurs (β, λ) suivant la loi jointe

$$f(\beta, \lambda) \propto \left[\frac{\lambda^{\alpha-1}\beta^{\alpha-1}\exp(-\beta\lambda)}{\Gamma(\alpha)}\right] \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{\lambda^{x_i}}{x_i!}e^{-\lambda}\right) I_{\mathbb{R}^+}(\lambda)\, I_{\mathbb{R}^+}(\beta)$$

où $\propto$ signifie "proportionnel à", $I_{\mathbb{R}^+}(x)$ est la fonction indicatrice sur $\mathbb{R}^+$ telle que

$$I_{\mathbb{R}^+}(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x > 0 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

α est un paramètre connu et $x_1, ..., x_n$ sont n observations (qui sont également connues). On rappelle qu'une variable aléatoire X suit une loi gamma de paramètres a et b (ce que l'on notera $X \sim \mathcal{G}(a, b)$) si sa densité s'écrit

$$f(x\,|a, b) = \frac{b^a}{\Gamma(a)} x^{a-1} e^{-bx} I_{\mathbb{R}^+}(x).$$

1) Expliquer pourquoi le fait de ne connaître $f(\beta, \lambda)$ qu'à un facteur multiplicatif près ne pose pas de problème pour simuler des vecteurs distribués cette loi.
2) Déterminer les lois conditionnelles $f(\beta|\,\lambda)$ et $f(\lambda|\,\beta)$ et montrer que ce sont des lois gamma dont on précisera les paramètres.
3) Rappeler le principe de l'échantillonneur de Gibbs permettant de générer des vecteurs distribués suivant $f(\beta, \lambda)$.
4) Après avoir simulé K vecteurs notés $\left(\boldsymbol{\beta}^{(k)}, \lambda^{(k)}\right)$ (pour $k = 1, ..., K$) distribués suivant $f(\beta, \lambda)$, expliquer comment on peut estimer les paramètres β et λ. Qu'est ce que la période de chauffage (burn-in) de l'échantillonneur de Gibbs ?