Processus Stochastiques

Jean-Yves Tourneret[1]

(1) Université of Toulouse, ENSEEIHT-IRIT-TéSA

Thème 1 : Analyse et Synthèse de l'Information

jyt@n7.fr

Plan du cours

- Chapitre 1 : Chaînes de Markov à états discrets
- Chapitre 2 : Chaînes de Markov à états continus
- Chapitre 3 : Méthodes de Simulation
- Chapitre 4 : Suites Stationnaires
  - Stationnarité, Autocorrélation, Densité Spectrale de Puissance
  - Filtrage linéaire invariant dans le temps
  - Suites ARMA, AR et MA
  - Innovations, Théorème de Wold, Prédiction

Bibliographie

- Peter J. Brockwell and Richard A. Davis, Time Series: Theory and Methods, Springer Verlag, 2nd edition, 1998.
- Athanasios Papoulis and S. Unnikrishna Pillai, Probability, Random Variable and Stochastic Processes, McGraw Hill Higher Education, 4th edition, 2002.
- B. Porat, Digital Processing of Random Signal. Theory and Methods, Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1994.
- Bernard Lacaze, Processus aléatoires pour communications numériques, Hermes Sciences Publications, 2000.

Stationnarité

- Définition

$$
\begin{aligned}
E\left[x_n\right] &= \mu \\
E\left[x_n x_{n-m}^*\right] &= r_x(m) \triangleq r(m)
\end{aligned}
$$

Moyenne et fonction d'autocorrélation indépendantes du temps.

- Exemples
  - Bruit blanc
  - Echantillonnage périodique d'un processus aléatoire stationnaire à temps continu

Propriétés de la fonction d'autocorrélation

- Symétrie hermitienne

$$r^*(-m) = r(m)$$

- Valeur à l'origine

$$|r\,(m)| \leq r\,(0)$$

- Suite définie non négative

$$\sum_{j,k=1}^{n} a_j a_k^* r(j-k) \geq 0, \qquad \forall n, a_j, a_k$$

Propriétés de la densité spectrale de puissance

- **Théorème d'Erglotz**
  $r\left(m\right)$ définie non négative si et ssi

$$r\left(m\right) = \int_{-1/2}^{1/2} e^{2i\pi m f} dS(f)$$

où $S(.)$ est une fonction continue à droite, non décroissante, bornée sur $[-1/2, 1/2]$ et telle que $S(-1/2) = 0$.

- **Densité spectrale de puissance $s(f)$**
  Si $S(f) = \int_{-1/2}^{f} s(u)du$, on a

$$r\left(m\right) = \int_{-1/2}^{1/2} e^{2i\pi m f} s(f)df \quad \text{et} \quad s(f) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} r\left(m\right) e^{-2i\pi m f}$$

Preuve : voir polycopié ou livre de Brockwell and Davis.

Filtrage linéaire invariant dans le temps

- Définition

$$x_n = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_k e_{n-k} = h_n * e_n$$

- CNS de Stabilité BIBO

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |h_k| < \infty$$

- Transmittance

$$H(f) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_k e^{-j2\pi k f} = \text{TFD}\left[h_k\right], \qquad -\frac{1}{2} \leq f \leq \frac{1}{2}$$

Relations de Wiener-Lee

- Densité spectrale de puissance

$$s_x(f) = s_e(f) \left| H(f) \right|^2 \text{ avec } H(f) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_k e^{-j2\pi k f}$$

- Intercorrélation

$$r_{xe}(k) = E\left[x_n e_{n-k}^*\right] = h(k) * r_e(k)$$

- Formule des Interférences

$$\begin{aligned} r_{yz}(k) &= E\left[y_n z_{n-k}^*\right] \\ &= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} H(f)\, G^*(f)\, e^{j2\pi k f} s_e(f)\, df \end{aligned}$$

Preuve

- Autocorrélation

$$
\begin{aligned}
r_x(k) &= E\left[\sum_{i\in\mathbb{Z}} h_i e_{n-i} \sum_{j\in\mathbb{Z}} h_j^* e_{n-k-j}^*\right] \\
&= \sum_{i\in\mathbb{Z}} \sum_{j\in\mathbb{Z}} h_i h_j^* E\left[e_{n-i} e_{n-k-j}^*\right] \\
&= \sum_{i\in\mathbb{Z}} \sum_{j\in\mathbb{Z}} h_i h_j^* r_e(k+j-i)
\end{aligned}
$$

Preuve

- Densité Spectrale de Puissance

$$
\begin{aligned}
s_x(f) &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} r_x(k)\, e^{-j2\pi kf} \\
&= \sum_{i\in\mathbb{Z}} \sum_{k\in\mathbb{Z}} h_i h_k^* \left\{ \sum_{l\in\mathbb{Z}} r_e(l+k-i)\, e^{-j2\pi lf} \right\} \\
&= \sum_{i\in\mathbb{Z}} \sum_{k\in\mathbb{Z}} h_i h_k^* \left\{ \sum_{m\in\mathbb{Z}} r_e(m)\, e^{-j2\pi(m+i-k)f} \right\} \\
&= \sum_{i\in\mathbb{Z}} \sum_{k\in\mathbb{Z}} h_i h_k^* s_e(f)\, e^{-j2\pi(i-k)f} \\
&= s_e(f)\, |H(f)|^2
\end{aligned}
$$

Preuve

- Intercorrélation

$$
\begin{aligned}
r_{xe}(k) &= E\left[\left(\sum_{l=-\infty}^{\infty} h_l e_{n-l}\right) e^*_{n-k}\right] \\
&= \sum_{l=-\infty}^{\infty} h_l E\left[e_{n-l} e^*_{n-k}\right] \\
&= \sum_{l=-\infty}^{\infty} h_l r_e(k-l) \\
&= h(k) * r_e(k)
\end{aligned}
$$

Retour sur les chaînes de Markov

Le spectre d'une chaîne de Markov est une fraction rationnelle en $e^{-2i\pi f}$. En effet, pour $k \geq 0$, on a

$$
\begin{aligned}
r(k) &= E\left[x_n x_{n+k}\right] \\
&= \sum_{a,b} ab P\left[x_n = a, x_{n+k} = b\right] \\
&= \sum_{a,b} ab P\left[x_{n+k} = b \middle| x_n = a\right] P\left[x_n = a\right] \\
&= \sum_{a,b} \left(a P\left[x_n = a\right]\right) b p_{ab}^{(k)} = [\ldots] P^k [\vdots] \\
&= \sum_{i=1}^{l} a_i \lambda_i^{|k|}
\end{aligned}
$$

Exemple

Chaîne de Markov stationnaire de matrice de transition

$$P = \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 & 0 \\ 1/3 & 0 & 2/3 \\ 2/3 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}$$

associée à trois états $\{0, 1, -1\}$ de probabilités initiales égales aux probabilités limites $[\frac{3}{7}, \frac{2}{7}, \frac{2}{7}]$.

Suite ARMA

- Définition

$$\sum_{k=0}^{p} a_k x_{n-k} = \sum_{k=0}^{q} b_k e_{n-k}$$

où a_k et $b_k, k = 0, ..., n$ sont des nombres réels et où e_n est un bruit blanc ($E(e_n) = 0$ et $E(e_n^2) = \sigma_e^2$).

- Remarques
  - $a_0 = b_0 = 1$
  - Suites AR et MA
  - On suppose que $B(z)$ et $A(z)$ n'ont pas de zéros communs, ou alors on simplifie.
  - Approximation du spectre d'une suite stationnaire

Densité spectrale de puissance

- Transmittance

$$H(z) = \frac{X(z)}{E(z)} = \frac{\sum_{k=0}^{q} b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^{p} a_k z^{-k}}$$

- Wiener-Lee

$$s_x(f) = \sigma_e^2 \left| \frac{\sum_{k=0}^{q} b_k e^{-j2\pi k f}}{\sum_{k=0}^{p} a_k e^{-j2\pi k f}} \right|^2$$

La densité spectrale de puissance d'une suite ARMA est une fraction rationnelle en $e^{-j2\pi f}$.

La solution

Expression de x_n en fonction de e_n

- AR(1)

$$x_n = ax_{n-1} + e_n \text{ avec } |a| < 1$$

- AR(1)

$$x_n = ax_{n-1} + e_n \text{ avec } |a| > 1$$

- Cas général
  - On montre qu'il existe une solution stationnaire inversible, i.e., $x(n) = \sum_{k=0}^{\infty} h_k e(n-k)$ si et ssi $H(z)$ a tous ses pôles à l'intérieur du cercle unité.
  - Lorsqu'il n'y a pas de pôle sur le cercle unité, il existe une solution stationnaire de la forme

$$x(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_k e(n-k)$$

Autocorrélations dans le cas causal

- Équations de Yule-Walker

$$\sum_{k=0}^{p} a_k r\left(i-k\right) = \sum_{k=0}^{q} b_k E\left[x_{n-i} e_{n-k}\right],$$

avec $x_n = \sum_{j=0}^{\infty} h_j e_{n-j}$.

  - $i \geq q+1$

$$\sum_{k=0}^{p} a_k r\left(i-k\right) = 0 \Leftrightarrow r(i) = \sum_{k=1}^{p} a_k r\left(i-k\right)$$

  - $i \in \{0, ..., q\}$

$$r(i) = \sum_{k=1}^{p} a_k r\left(i-k\right) + \sigma_e^2 \sum_{k=i}^{q} b_k h_{k-i}$$

Autocorrélations d'une suite AR causale

- $i \geq 1$

$$r(i) = \sum_{k=1}^{p} a_k r\left(i-k\right)$$

- $i = 0$

$$\begin{aligned} r(0) &= \sum_{k=1}^{p} a_k r\left(-k\right) + \sigma_e^2 \\ &= \sum_{k=1}^{p} a_k r\left(k\right) + \sigma_e^2 \end{aligned}$$

Autocorrélations d'une suite MA causale

- $i \geq q+1$

$$r(i) = 0$$

- $i \in \{0, ..., q\}$

$$r(i) = \sigma_e^2 \sum_{k=i}^{q} b_k b_{k-i} = \sigma_e^2 \left(b_0 b_i + b_1 b_{i+1} + ... + b_{q-i} b_q\right)$$

On notera en particulier que $r(q+1) = 0$ et que

$$r(q) = b_0 b_q = b_q \neq 0$$

Ces deux dernières relations seront pratiques pour déterminer l'ordre du modèle MA.

Résumé Suites Stationnaires

- Autocorrélation-Densité spectrale

$$r\left(m\right) = \int_{-1/2}^{1/2} e^{2i\pi mf} s(f)df \quad \text{et} \quad s(f) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} r\left(m\right) e^{-2i\pi mf}$$

- Filtrage Linéaire
  - Relation entrée-sortie $X(f) = H(f)E(f)$
  - DSP sortie $s_x(f) = s_e(f)|H(f)|^2$
  - Intercorrélation $r_{xe}(k) = h(k) * r_e(k)$
- Autocorrélations d'une chaîne de Markov

$$r(k) = \sum_{i=1}^{l} a_i \lambda_i^{|k|}$$

Résumé Suites ARMA

- Définition

$$\sum_{k=0}^{p} a_k x_{n-k} = \sum_{k=0}^{q} b_k e_{n-k}$$

- Transmittance

$$H(z) = \frac{B(z)}{A(z)}$$

- Densité spectrale de puissance

$$s_x(f) = \sigma_e^2 \left| \frac{\sum_{k=0}^{q} b_k e^{-j2\pi k f}}{\sum_{k=0}^{p} a_k e^{-j2\pi k f}} \right|^2$$

Résumé Suites ARMA

- Solution
  - pôles à l'intérieur du cercle unité $\Leftrightarrow$ solution stationnaire causale
  - pôles à l'extérieur du cercle unité $\Leftrightarrow$ solution stationnaire anti causale
- Autocorrélations dans le cas causal
  - peuvent se déterminer à l'aide des équations de Yule-Walker
  - permettent d'estimer les paramètres de la suite ARMA

Innovations d'une suite stationnaire ($E[x_t] = 0$)

- Définition
  H_n le sous espace engendré par $\{x_{t,}t \leq n\}$ (le passé et le présent de x_n). L' innovation de x_n est définie par

$$u_n = x_n - P_{H_{n-1}}(x_n) = x_n - \widehat{x}_n.$$

- Propriétés
  - $u_n \in H_n$
  - La suite des innovations $\{u_n, n \in \mathbb{Z}\}$ est constituée de variables aléatoires non-corrélées (orthogonales)
  - la suite $\{u_n, n \in \mathbb{Z}\}$ est une suite stationnaire de moyenne nulle et de variance finie

Suites déterministes et régulières

- Suites déterministes

$$\sigma^2 = E\left[|x_n - \widehat{x}_n|^2\right] = 0 \;\Rightarrow\; u_n = 0 \text{ p.s.}$$

  - Suite parfaitement prédictible à partir de son passé

$$x_n = \widehat{x}_n = -\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k x_{n-k}$$

  - Ex. : $x_n = A\cos(2\pi f_0 n + \theta) = 2\cos(2\pi f_0) x_{n-1} - x_{n-2}$.
- Suites régulières

$$\sigma^2 = E\left[|x_n - \widehat{x}_n|^2\right] \neq 0.$$

Normalisation : $E[u^2(n)] = 1$, Exemple : suite ARMA.

Décomposition de Wold

Toute suite stationnaire de moyenne nulle s'écrit

$$x_n = y_n + v_n = \sum_{s=0}^{\infty} \beta_s u_{n-s} + v_n, \text{ où}$$

- (a) u_n et v_n sont des suites décorrélées

$$E\left[v_m u_n\right] = 0, \qquad \forall n, m$$

- (b) u_n est l'innovation appartenant à H_n
- (c) v_n est une variable aléatoire appartenant à $H_{-\infty}$,
- (d) v_n est une suite déterministe
- (e) y_n est une suite régulière

Cas particuliers

- Suites déterministes ($x_n = v_n$)
  - $x_n = \alpha \;\Rightarrow\; \widehat{x}_n = E\left[x_n \middle| x_{n-1}, x_{n-2}, ...\right] = \alpha = x_n$, i.e., $u_n = 0$.
  - $x_n = A\cos\left(2\pi f_0 n + \theta\right) = 2\cos\left(2\pi f_0\right) x_{n-1} - x_{n-2}$, i.e., $u_n = 0$.
- Bruit blanc

$$\widehat{x}_n = E\left[x_n \middle| x_{n-1}, x_{n-2}, ...\right] = E\left[x_n\right] = 0 \;\Rightarrow\; u_n = x_n - \widehat{x}_n = x_n$$

Décomposition de Wold d'une suite ARMA

- Résultat fondamental

$$x_n = \sum_{s=0}^{\infty} \beta_s u_{n-s}$$

i.e., filtrage causal des innovations (donc les pôles de $\beta(z)$ sont tous à l'intérieur du cercle unité).

- Inversibilité
Si les pôles et zéros de $\beta(z)$ ne sont pas sur le cercle unité, alors

$$u_n = \sum_{s=0}^{\infty} \alpha_s x_{n-s}$$

avec pôles de $\alpha(z)$ (zéros de $\beta(z)$) à l'intérieur du cercle unité.

Exemples de décompositions de Wold

- Suites AR(1)
  - $x_n = ax_{n-1} + e_n$ avec $|a| < 1$
  - $x_n = ax_{n-1} + e_n$ avec $|a| > 1$
- Suites MA(1)
  - $x_n = e_n - ae_{n-1}$ avec $|a| < 1$
  - $x_n = e_n - ae_{n-1}$ avec $|a| > 1$

Prédiction

On observe une suite stationnaire aux instants $t \leq 0$ et on cherche à estimer x_n avec $n > 0$ à l'aide du meilleur estimateur linéaire à partir des éléments $\{x_0, x_{-1}, ...\}$. La solution de ce problème est immédiate dans le cas où $v_n = 0$ dans la décomposition de Wold (e.g., suites ARMA). En effet, à partir de

$$x_n = \sum_{s=0}^{\infty} \beta_s u_{n-s}$$

puisque les innovations sont orthogonales, on a

$$\widetilde{x}_n = P_{H_0}(x_n) = \sum_{s=n}^{\infty} \beta_s u_{n-s}.$$

Erreur de prédiction : $\sigma_n^2 = E\left[|x_n - \widetilde{x}_n|^2\right] = \sum_{s=0}^{n-1} \beta_s^2$.