Processus Stochastiques

Jean-Yves Tourneret[1]

(1) Université of Toulouse, ENSEEIHT-IRIT-TéSA

Thème 1 : Analyse et Synthèse de l'Information

jyt@n7.fr

Plan du cours

- Chapitre 1 : Chaînes de Markov à états discrets
  - Définitions, exemples, notations
  - Chaîne de Markov Homogène
  - Propriétés
  - Lois des états
  - Lois stationnaires et limites
- Chapitre 2 : Chaînes de Markov à états continus
- Chapitre 3 : Méthodes de Simulation
- Chapitre 4 : Suites Stationnaires

Bibliographie

- Alan Ruegg, Processus Stochastiques, Presses Polytechniques et Universitaires Romandes, Méthodes mathématiques pour l'ingénieur, 1993.
- Athanasios Papoulis and S. Unnikrishna Pillai, Probability, Random Variable and Stochastic Processes, McGraw Hill Higher Education, 4th edition, 2002.
- Bruno Baynat, Théorie des files d'attente. Des Chaînes de Markov aux réseaux à forme produit, Hermes Sciences Publications, 1997
- Bernard Lacaze, Processus aléatoires pour communications numériques, Hermes Sciences Publications, 2000.

Définitions

- Espace d'états (fini ou infini dénombrable)

$$E = \{0, 1, ..., i, ...\}$$

- Propriété de Markov

$$P\left[x_{n+1} = j \middle| x_n = i, x_{n-1} = i_{n-1}, ..., x_0 = i_0\right] = P\left[x_{n+1} = j \middle| x_n = i\right]$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $(i, j, i_{n-1}, ..., i_1, i_0) \in E$.

Une suite de variables aléatoires $X = \{x_n, n = 0, 1, ...\}$ à valeurs dans E vérifiant la propriété de Markov est appelée chaîne de Markov.

Exemples

- Marche aléatoire (gain à un jeu)

$$x_{n+1} = x_n + g_n$$

- Communication numériques

$$\begin{aligned} P\left[x_{n+1} = 1 \middle| x_n = 0\right] &= \alpha, P\left[x_{n+1} = 0 \middle| x_n = 0\right] = 1 - \alpha \\ P\left[x_{n+1} = 1 \middle| x_n = 1\right] &= 1 - \beta, P\left[x_{n+1} = 0 \middle| x_n = 1\right] = \beta \end{aligned}$$

- ...

Notations

- Probabilités de transition

$$p_{ij}(m,n) = P\left[x_n = j \middle| x_m = i\right].$$

- Matrice de transition

$$\boldsymbol{P}\left(m,n\right) = \begin{pmatrix} p_{00}(m,n) & p_{01}(m,n) & \dots & p_{0j}(m,n) & \dots \\ p_{10}(m,n) & p_{11}(m,n) & \dots & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ p_{i0}(m,n) & \dots & \dots & p_{ij}(m,n) & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

Chaîne de Markov Homogène

On dit qu'une chaîne de Markov est homogène si $p_{ij}(m,n)$ ne dépend que de $n-m$. On note alors

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} p_{00} & p_{01} & \cdots & p_{0j} & \cdots \\ p_{10} & p_{11} & \cdots & \cdots & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ p_{i0} & \cdots & \cdots & p_{ij} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}$$

qui contient les probabilités associées à $n-m=1$. La chaîne est alors définie par la matrice de transition $\boldsymbol{P}$ et les probabilités initiales

$$p_k(0) = P\left[x_0 = k\right].$$

Propriétés

- Matrice Stochastique
  $\boldsymbol{P}(m,n)$ est une matrice d'éléments positifs ou nuls telle que

$$\sum_j p_{ij}(m,n) = \sum_j P\left[x_n = j \middle|\, x_m = i\right] = 1.$$

Elle admet donc la valeur propre $\lambda = 1$.

Propriétés

- Équations de Chapman-Kolmogorov

$$p_{ij}(m,n) = \sum_k p_{ik}(m,r)p_{kj}(r,n), \qquad m<r<n$$

i.e.

$$\mathbf{P}(m,n) = \mathbf{P}(m,r)\mathbf{P}(r,n) = \mathbf{P}(m,m+1)...\mathbf{P}(n-1,n)$$

Cas d'une chaîne homogène

$$\mathbf{P}(m,n) = \mathbf{P}^{n-m} \quad \text{ou} \quad \mathbf{P}\left(0,n\right) = \mathbf{P}^n$$

Preuve

$$
\begin{aligned}
p_{ij}(m,n) &= P\left[x_n = j \middle|\, x_m = i\right] \\
&= \frac{P\left[x_n = j, x_m = i\right]}{P\left[x_m = i\right]} \\
&= \frac{1}{P\left[x_m = i\right]} \sum_k P\left[x_n = j, x_r = k, x_m = i\right] \\
&= \sum_k P\left[x_n = j, x_r = k \,|x_m = i\,\right] \\
&= \sum_k P\left[x_n = j \,|x_r = k, x_m = i\right] P\left[x_r = k \,|x_m = i\right] \\
&= \sum_k p_{ik}(m,r)p_{kj}(r,n)
\end{aligned}
$$

Loi des états

$$\begin{aligned} p_j(n) &= P\left[x_n = j\right] = \sum_k P\left[x_n = j, x_m = k\right] \\ &= \sum_k P\left[x_n = j \middle| x_m = k\right] P\left[x_m = k\right] = \sum_k p_{kj}(m,n) p_k(m). \end{aligned}$$

En notant $\mathbf{q}(n) = [p_0(n), p_1(n), ..., p_j(n), ...]$, on en déduit

$$\mathbf{q}(n) = \mathbf{q}(m)\mathbf{P}(m,n)$$

Pour une chaîne homogène

$$\mathbf{q}(n) = \mathbf{q}(n-1)\mathbf{P} = \mathbf{q}(0)\mathbf{P}^n$$

ce qui montre que la loi des états est définie par la loi initiale $\mathbf{q}(0)$ et par la matrice de transition $\mathbf{P}$.

Lois Stationnaires

- Loi stationnaire
  $\pi = (\pi_1, ..., \pi_k, ...)$ est une distribution stationnaire par rapport à la matrice de transition $\mathbf{P}$ si et ssi

$$\pi = \pi \mathbf{P}$$

☞ Chaîne stationnarisée

Lois Limites

- Loi limite
  On dit qu'une chaîne de Markov converge vers π ou possède la distribution limite π si

$$\lim_{n \to \infty} \mathbf{q}(n) = \pi$$

  indépendamment de la loi initiale de $\mathbf{q}(0)$ et si π est une loi de probabilité.

  ☞ La convergence d'une chaîne de Markov est une propriété qui ne dépend que de la matrice de transition $\mathbf{P}$.

Existence Lois stationnaires

- Théorème
  Pour une chaîne de Markov **finie**, il existe toujours **au moins** une distribution stationnaire.
- Non unicité

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

  admet une infinité de distributions stationnaires

$$(0, 1-2\alpha, \alpha, \alpha)\,, \quad 0 \leq \alpha \leq 1/2.$$

- Chaîne de Markov infinie

Théorème - Existence lois limites

- Hypothèses
  Il existe des entiers k_0, n_0 et un réel $\delta > 0$ tels que

$$p_{ik_0}^{(n_0)} > \delta > 0, \qquad i = 0, ..., l-1,$$

  (la condition signifie que les éléments de la colonne k_0 de $\mathbf{P}^{n_0}$ sont bornés inférieurement par δ).
- Conclusions
  Il existe $q_0, ..., q_{l-1}$ tels que

$$\lim_{n\to\infty} p_{jk}^{(n)} = \pi_k, \qquad j = 0, ..., l-1$$

  avec

Existence des lois limites

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}^n = \begin{pmatrix} \pi_0 & \pi_1 & \cdots & \pi_{l-1} \\ \pi_0 & \pi_1 & \cdots & \pi_{l-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \pi_0 & \pi_1 & \cdots & \pi_{l-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pi \\ \vdots \\ \pi \end{pmatrix}$$

et

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{q}(n) = \lim_{n\to\infty} \mathbf{q}(0)\mathbf{P}^n = \pi = (\pi_0, ..., \pi_{l-1})$$

On notera que la limite π ne dépend pas de $\mathbf{q}(0)$.

Détermination de la loi limite

- Détermination de la loi limite
  π est l'unique solution de

$$\pi = \pi\mathbf{P} \text{ avec } \sum_{k=0}^{l-1} \pi_k = 1$$

- Rapidité de convergence vers la matrice de transition limite

$$\|\mathbf{P}^n - \mathbf{P}^\infty\| = \sup_{j,k} \left| p_{jk}^{(n)} - \pi_k \right| \leq (1 - s\delta)^{\frac{n}{n_0}-1}$$

où s est le nombre de colonnes de $\mathbf{P}^{n_0}$ vérifiant l'hypothèse du théorème.