Processus Stochastiques

Jean-Yves Tourneret[1]

(1) Université of Toulouse, ENSEEIHT-IRIT-TéSA

Thème 1 : Analyse et Synthèse de l'Information

jyt@n7.fr

Plan du cours

- Chapitre 1 : Chaînes de Markov à états discrets
- Chapitre 2 : Chaînes de Markov à états continus
    - Définitions, exemples, notations
    - Chaîne de Markov Homogène
    - Propriétés
    - Lois des états
    - Lois stationnaires et limites
- Chapitre 3 : Méthodes de simulation
- Chapitre 4 : Suites Stationnaires

Bibliographie

- Christian P. Robert and George Casella, Monte Carlo Statistical Methods, Springer-Verlag, New-York, 2nd Edition, 2004.
- Alan Ruegg, Processus Stochastiques, Presses Polytechniques et Universitaires Romandes, Méthodes mathématiques pour l'ingénieur, 1993.
- Athanasios Papoulis and S. Unnikrishna Pillai, Probability, Random Variable and Stochastic Processes, McGraw Hill Higher Education, 4th edition, 2002.

Définitions

- E : Espace d'états infini non dénombrable
- Propriété de Markov

$$
\begin{aligned}
P\left[x_{n+1} \in A \middle| x_n = i, x_{n-1} = i_{n-1}, ..., x_0 = i_0\right] \\
= P\left[x_{n+1} \in A \middle| x_n = i\right] \\
= \int_A K(i, x_{n+1}) dx_{n+1}.
\end{aligned}
$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $(i, j, i_{n-1}, ..., i_1, i_0) \in E$, où $K(i, x_{n+1}) = f(x_{n+1}|x_n = i)$ est le noyau de transition de la chaîne de Markov (ici, une densité conditionnelle).

Une suite de va $X = \{x_n, n = 0, 1, ...\}$ à valeurs dans E vérifiant la prop. de Markov est une chaîne de Markov.

Exemples

- Marche aléatoire

$$x_{n+1} = x_n + \epsilon_n$$

où $(\epsilon_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ est une suite de variables aléatoires iid.

- Modèle AR(1)

$$x_{n+1} = a x_n + \epsilon_n$$

où $(\epsilon_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ est une suite de variables aléatoires iid.

- ...

Chaîne de Markov Homogène

- Définition : on dit qu'une chaîne de Markov à états continus est homogène si la loi conditionnelle de $(x_{t_1}, ..., x_{t_k})|x_{t_0}$ est la même que la loi conditionnelle de $(x_{t_1-t_0}, ..., x_{t_k-t_0})|x_0$ avec $t_0 \leq t_1 \leq ... \leq t_k$.
- Remarque : les chaînes de Markov utilisées pour les méthodes MCMC sont homogènes.
- Exemple de chaîne de Markov non homogène : algorithme du recuit simulé.

Propriétés

- Équations de Chapman Kolmogorov

$$
\begin{aligned}
K^n(x,A) &= \int K(x,y)K^{n-1}(y,A)dy \\
K^{n+m}(x,A) &= \int K^m(x,y)K^n(y,A)dy
\end{aligned}
$$

  où $K^n(x,A)$ est la probabilité d'aller de x à un élément de A en n coups.

- Remarque
  Pour aller de x à A en $n+m$ coups, if faut passer par y au $m^{\text{ième}}$ coup !!

Lois Stationnaires

- Définition
  On dit que π est une loi stationnaire d'une chaîne de Markov de noyau de transition K si $\pi(x)$ est une densité de probabilité et si

$$\pi(B) = \int \pi(x)K(x,B)dx$$

  avec $\pi(B) = \int_B \pi(x)dx$ (analogie avec $\pi = \pi \boldsymbol{P}$).

- Remarque
  On parle aussi de loi invariante car si $x_n \sim \pi$ et que π est une loi stationnaire de la chaîne de Markov alors $x_{n+1} \sim \pi$.

Detailed Balance Condition

- Définition
  Une chaîne de Markov de noyau de transition K vérifie la condition d'équilibre (detailed balance condition) s'il existe une fonction π telle que

$$K(y,x)\pi(y) = K(x,y)\pi(x)$$

  pour tout couple $(x,y) \in E^2$.
- Remarque
  C'est une condition suffisante (mais pas nécessaire) pour que π soit une loi stationnaire de la chaîne de Markov.

Preuve

$$
\begin{aligned}
\int_E \pi(y) K(y,B) dy &= \int_E \pi(y) \left[\int_B K(y,x) dx \right] dy \\
&= \int_E \int_B \pi(y) K(y,x) dx dy \\
&= \int_E \int_B \pi(x) K(x,y) dx dy \\
&= \int_B \pi(x) \left[\int_E K(x,y) dy \right] dx \\
&= \int_B \pi(x) dx
\end{aligned}
$$

Christian P. Robert and George Casella, *Monte Carlo Statistical Methods*, Springer-Verlag, New-York, 2nd Edition, 2004.